UNIVERSITE DE NANTES
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

**ECOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATHEMATIQUES**

Année : 2011 No B.U. :

Opérateurs de Schrödinger et transformée de Riesz sur les variétés complètes non-compactes

Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Présentée et soutenue publiquement par

Baptiste Devyver

le 01 juillet 2011, devant le jury ci-dessous

Président du jury	:	Dominique BAKRY	Professeur (Université Toulouse III)
Rapporteurs	:	Emmanuel RUSS	Maître de Conf. (Univ. Aix-Marseille III)
		Laurent SALOFF-COSTE	Professeur (Cornell University)
Examinateurs	:	Pascal AUSCHER	Professeur (Université Paris-Sud 11 Orsay)
		Colin GUILLARMOU	C.R. CNRS (ENS Paris)
		Rafe MAZZEO	Professeur (Stanford University)
Directeur de thèse	:	Gilles CARRON	Professeur (Université de Nantes)
Laboratoire	:	Laboratoire Jean Leray	(UMR 6629 UN-CNRS-ECN)

Introduction

Le but de cette thèse est d'étudier certains opérateurs de Schrödinger sur les variétés complètes non-compactes, ainsi que quelques problèmes en lien avec ces opérateurs. On distingue deux parties. Dans la première, on étudiera un problème de théorie spectrale pour les opérateurs de Schrödinger : on se demandera à quelle condition leur spectre ne comporte qu'un nombre fini de valeurs propres négatives. La seconde partie est consacrée à l'étude de la transformée de Riesz sur les variétés Riemanniennes. On montrera d'abord une estimée Gaussienne pour le noyau de la chaleur de certains opérateurs de Schrödinger généralisés, agissant sur les sections d'un fibré vectoriel – le cas le plus important de tels opérateurs, et la source de notre intérêt pour ceux-ci, étant le Laplacien de Hodge-De Rham agissant sur les formes différentielles. Cela nous permettera de montrer que sur des variétés vérifiant une inégalité de Sobolev et dont la courbure de Ricci n'est pas trop négative à l'infini dans un sens intégral, la transformée de Riesz est bornée sur L^p pour tout $1 < p < \infty$ en l'absence de 1-formes harmoniques L^2 non-nulle. Puis, en utilisant des techniques de perturbation, on montrera que même en présence de formes harmoniques L^2 non-nulles, la transformée de Riesz est bornée sur L^p pour $1 < p < n$, n étant la dimension de Sobolev. Enfin, on établira un résultat de perturbation visant à étudier la transformée de Riesz sur L^p pour $p > n$.

Table des matières

Chapitre 1

Un problème de théorie spectrale

1.1 Introduction au problème

1.1.1 Opérateurs de Schrödinger

Sur une variété Riemannienne complète non-compacte M, on considère un **opérateur de Schrödinger** :

$$H := \Delta + V,$$

où V est une fonction à valeurs réelles sur M, qu'on appellera le potentiel de H. Si l'on suppose H borné inférieurement, alors H est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(M)$. Il est naturel de chercher à comprendre comment le spectre de H dépend de V : plus précisément, étant donné que Δ est positif, le spectre négatif de H provient de la partie négative du potentiel V, et il est donc intéressant d'essayer de comprendre ce spectre négatif. En fait, sous certaines hypothèses sur V, par exemple si V tend vers 0 à l'infini, alors le spectre essentiel de H est inclus dans $[0,\infty)$, et donc le spectre négatif est constitué uniquement de valeurs propres isolées, de multiplicité finie.

Exemple 1.1.1 *Sur $\mathbb{R}^n$, pour $n \geq 3$, si $V(x) = -\frac{c}{||x||^2}$, alors H est positif si et seulement si $c \leq \frac{n-2}{2}$. Cela vient de l'inégalité de Hardy :*

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(f(x))^2}{||x||^2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} ||\nabla f||^2 dx, \, \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.1}$$

Citons déjà le résultat suivant, qui donne une caractérisation de l'absence de spectre négatif.

Théorème 1.1.1 *Supposons H borné inférieurement et $V \in L^\infty_{loc}$. Alors H est positif si et seulement si il existe une fonction φ strictement positive, dans $W^{1,2}(M)$, telle que*

$$H\varphi = 0$$

au sens faible.

En fait, on a même le résultat plus précis suivant, dû à Fischer-Colbrie et Schoen, qui est valable pour les domaines d'une variété (voir [29] et le Lemme 3.1 de [48]) :

Théorème 1.1.2 *Soit M une variété Riemannienne, $\Omega \subset M$ un ouvert lisse, et $V \in L^\infty_{loc}$. Notons H_Ω l'opérateur de Schrödinger $H := \Delta + V$ sur Ω, avec conditions de Dirichlet au bord, et supposons qu'il soit borné inférieurement. On l'identifie avec son extension de Friedrichs, qui est auto-adjointe. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe $\varphi \in W^{1,2}_{loc}$ solution strictement positive de*

$$H\varphi = 0 \text{ sur } \Omega.$$

2. *$\lambda_1(H_\Omega) \geq 0$, où λ_1 est l'infimum du spectre.*

A la vue de ces résultats, une question naturelle est la suivante :

Question 1 : peut-on trouver une condition équivalente, semblable à celle du Théorème 1.1.1, à ce que H ait un nombre fini (en comptant les multiplicités) de valeurs propres strictement négatives ?

Fischer-Colbrie [28] a montré un résultat dans cette direction :

Théorème 1.1.3 *Soit M une variété Riemannienne complète, et H un opérateur de Schrödinger borné inférieurement sur M, avec potentiel dans L^∞_{loc}. Si H a un nombre fini (en comptant les multiplicités) de valeurs propres strictement négatives, alors il existe une fonction strictement positive φ dans $W^{1,2}_{loc}$ solution de*

$$H\varphi = 0$$

en-dehors d'un compact.

Idée de la preuve : La stratégie consiste à montrer que l'hypothèse de finitude du spectre strictement négatif entraîne l'existence d'un compact K de M tel que si $\Omega = M \setminus K$,

$$\lambda_1(\Omega) \geq 0,$$

où $\lambda_1(\Omega)$ est la première valeur propre de H avec conditions de Dirichlet sur Ω. En appliquant ensuite le Théorème 1.1.2, on aura le résultat. On procède par l'absurde : si pour tout compact K de M, $\lambda_1(M \setminus K) < 0$, alors on pourrait trouver une fonction φ_K lisse à support compact inclus dans $M \setminus K$ telle que $q(\varphi) < 0$, où q est la forme quadratique associée à H. En prenant une suite de compacts disjoints, on pourrait ainsi trouver une suite de fonctions $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ lisses à support compacts disjoints, sur lesquelles la forme quadratique associée à H serait strictement négative. Ceci impliquerait que le spectre strictement négatif de H est infini, ce qui est absurde.

$\square$

Remarque 1.1.1 *Mentionnons que le but de Fischer-Colbrie et Schoen lorsqu'ils s'intéressaient aux opérateurs de Schrödinger sur les variétés, était de montrer des résultats concernant les surfaces minimales. En effet, pour une surface minimale M dans une variété N de dimension 3, on peut considérer l'opérateur de Schrödinger, appelé **opérateur de stabilité** sur M :*

$$H := \Delta + S - K + \frac{1}{2}|A|^2,$$

où S est la courbure scalaire de N, K est la courbure de Gauss de M et A est la seconde forme fondamentale de l'immersion. H est l'opérateur linéaire de variation seconde de la fonctionnelle locale d'aire sur la surface M ; puisque M est minimale, tout point de M est point critique pour la fonctionnelle locale d'aire, et dire que M est stable, ou que H est positif, signifie qu'au second ordre les déformations de M font croître l'aire. Les propriétés spectrales de H, par exemple le fait que H ait un spectre strictement négatif fini, ont des conséquences premièrement pour la géométrie de M, et deuxièmement pour la topologie de N.

1.1.2 La méthode de Bochner

Nous allons donner une motivation géométrique à l'étude des opérateurs de Schrödinger sur les variétés Riemanniennes : cette motivation provient de ce qui est appelé la *méthode de Bochner*. On verra que cette approche sera d'une importance fondamentale pour la deuxième partie de cette thèse. On considère une variété Riemannienne M, et un fibré Riemannien E au-dessus de celle-ci, muni d'une connexion ∇ compatible avec la métrique. On suppose donné sur E un Laplacien géométrique $\vec{\Delta}$ agissant sur les sections de E, relié au Laplacien brut $\bar{\Delta} = -Tr(\nabla^2) = \nabla^\star\nabla$ par une *formule de Bochner* :

$$\vec{\Delta} = \bar{\Delta} + \mathcal{R}, \tag{1.2}$$

où $\mathcal{R} \in End(E)$ est un champ d'endomorphismes symétriques (dépendant typiquement de la courbure de ∇). Remarquons que selon Gilkey, tout opérateur du second ordre symétrique L, agissant sur les sections de E, à symbole principal

$$\sigma(L)(\xi) = -|\xi|^2 Id,$$

est de ce type. Des exemples de tels opérateurs sont le Laplacien de Hodge $dd^\star + d^\star d$ agissant sur les k-formes différentielles, et le Laplacien de Dirac agissant sur les spineurs. Dans le cas du Laplacien de Hodge agissant sur les 1-formes, la formule de Bochner est particulièrement simple :

$$\vec{\Delta} = \bar{\Delta} + Ric,$$

où Ric est le champ d'endomorphismes symétriques associé au tenseur de Ricci. Revenons au cas général. Etant donné un tel Laplacien géométrique, un problème intéressant est alors d'étudier l'espace des sections harmoniques, défini comme l'espace des sections ξ de E telles que $\vec{\Delta}\xi = 0$. Une question naturelle est la suivante :

Question 2 : quand l'espace des sections harmoniques, satisfaisant certaines conditions d'intégrabilité (par exemple, l'espace des sections harmoniques L^2), est-il de dimension finie ?

Le théorème de Bochner classique nous apprend que c'est le cas lorsque $\mathcal{R}$ est positif. Que se passe-t-il lorsqu'on autorise une certaine négativité pour $\mathcal{R}$? Un résultat dans ce sens est le suivant : pour $x \in M$, on définit un potentiel $V(x)$ comme étant la partie négative de la plus petite valeur propre de l'endomorphisme symétrique $\mathcal{R}(x)$. Une conséquence de l'inégalité de Kato est que si ξ est une section harmonique, alors

$$\Delta|\xi| + V|\xi| \leq 0. \tag{1.3}$$

On est donc amené à considérer l'opérateur de Schrödinger $H := \Delta + V$ sur M. Utilisant l'équation (1.3), Pigola-Rigoli-Setti ont obtenu dans [48] une condition suffisante à ce que l'espace des sections harmoniques L^2 soit de dimension finie : il suffit qu'il existe une fonction strictement positive φ solution de

$$H\varphi = 0$$

en-dehors d'un compact. Pour apporter une réponse partielle à la deuxième question, on doit donc se demander à quelles conditions sur H une telle fonction φ existe.

1.1.3 Enoncé des résultats

On voit que les deux questions que nous avons soulevées sont liées. Dans cette partie, notre résultat principal sera le suivant :

Théorème 1.1.4 *Soit M une variété Riemannienne complète, et soit $H = \Delta + V$ un opérateur de Schrödinger sur M avec potentiel V dans L^∞_{loc}. On suppose H borné inférieurement. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La partie strictement négative du spectre de H consiste en un nombre fini (en comptant les multiplicités) de valeurs propres.*
2. *Il existe une fonction strictement positive φ dans $W^{1,2}_{loc}$, solution de $H\varphi = 0$ en-dehors d'un compact.*

De plus, si l'on est dans l'un de ces deux cas, alors $Ker_{L^2}(H)$ est de dimension finie.

Nous prouverons d'abord ce théorème pour un potentiel V lisse. Nous indiquerons à la fin comment modifier la preuve dans le cas d'un potentiel dans L^∞_{loc}.
L'idée de la preuve sera de définir un nouvel opérateur $L = \varphi^{-1}H\varphi$: la *transformée de Doob* de H par φ. Cet opérateur L sera de type Schrödinger :

$$L = \Delta_{\varphi^2} + \tilde{V},$$

mais avec un potentiel $\tilde{V}$ à support compact (Δ_{φ^2} étant un Laplacien à poids). Pour traiter le cas d'un potentiel à support compact, on montrera le résultat suivant, intéressant par ailleurs :

Théorème 1.1.5 *Soit L un opérateur du type : $L = \Delta_\mu + W$ avec $W \geq 0$, où $\Delta_\mu = -\frac{1}{\mu}div(\mu\, grad)$ est un Laplacien à poids, avec μ une fonction C^1 strictement positive. Soit V un potentiel à support compact dans L^p pour un certain $\frac{n}{2} < p \leq \infty$. Alors*

$$\sup\{dim(F) : F \subset C_0^\infty \text{ et } q|_F \leq 0\},$$

où q est la forme quadratique associée à $L + V$, est fini. Si de plus $V \in L^2$ (ce qui est le cas si $n \geq 4$), alors $Ker_{L^2}(L+V) := \{\varphi \in L^2 : (L+V)\varphi = 0\}$ est de dimension finie.

Il y aura deux ingrédients pour la preuve de ce résultat : tout d'abord, suivant une idée qui remonte à Birman et Schwinger (voir par exemple [53], p.98-99), on peut majorer $\sup\{dim(F) : F \subset C_0^\infty$ et $q|_F \leq 0\}$ par le nombre de valeurs propres supérieures ou égales à 1 de $L^{-1/2}(-V)L^{-1/2}$. Ensuite, la deuxième idée, qui provient de [11], Proposition 1.2, est que l'inégalité de Sobolev, et plus généralement la non-parabolicité de (M, g) a des conséquences pour l'opérateur $\Delta^{-1/2}V\Delta^{-1/2}$: dans le cas où V est à support compact, cet opérateur est compact si (M, g) est non-parabolique. Nous étendrons ceci à $L^{-1/2}(-V)L^{-1/2}$ lorsque M est non-parabolique pour L. Enfin, nous utiliserons une astuce pour traiter le cas où L est parabolique.

Remarque 1.1.2 *Comme nous l'avons déjà mentionné, le résultat concernant la finitude de la dimension du noyau de $L + V$ peut aussi s'obtenir en appliquant le Théorème 5.1 de [48], dans le cas où $L = \Delta$ et V est continu. Notre preuve est différente, et s'obtient comme conséquence relativement directe des résultats préliminaires.*

Remarque 1.1.3 *Dans le cas où M vérifie une inégalité de Sobolev de dimension ν :*

$$||f||_{\frac{2\nu}{\nu-2}} \leq C||\nabla f||_2, \forall f \in C_0^\infty(M),$$

*la **borne de Cwickel-Lieb-Rosenbljum** nous dit que $N_-(V)$, le cardinal du spectre strictement négatif de $\Delta + V$, vérifie :*

$$N_-(V) \leq C \int_M (V_-)^{\nu/2},$$

où $V_- = -\inf(V,0)$ est la partie négative de V (voir [56]). C'est une estimée quantitative sur $N_-(V)$, contrairement au Théorème 1.1.5 qui est de nature qualitative ; cependant, nous nous plaçons dans un cadre plus général en ne supposant pas que M vérifie l'inégalité de Sobolev.

Cette partie de la thèse est organisée comme suit. Dans les deux premières sections, nous mettons au point les techniques qui seront utiles pour prouver nos résultats ; dans la première, nous faisons des rappels sur la parabolicité d'opérateurs de la forme $L := \Delta_\mu + W$. Dans la seconde, nous nous intéressons à certaines conséquences de la non-parabolicité de l'opérateur L. Dans une troisième section, nous prouvons les résultats présentés ci-dessus, dans le cas d'un potentiel lisse pour le Théorème 1.4.2. Dans une quatrième, nous nous intéressons au cas d'un potentiel dans L^∞_{loc}, et enfin dans une cinquième, nous présentons une autre preuve des Théorèmes 1.4.2 et 1.1.5.

1.2 Parabolicité sur une variété Riemannienne

Dans cette partie, on passe en revue certains aspects de la notion de parabolicité. Comme références, citons [3], [34] et [35].
Notations : Dans toute cette partie de la thèse, (M,g) sera une variété Riemannienne complète, dx sa mesure Riemannienne et $C_0^\infty(M)$ (ou même C_0^∞) l'espace des fonctions lisses à support compact sur M.
On considère sur M un opérateur L du type $L = \Delta_\mu + W$, W potentiel positif dans L^∞_{loc}. Il est bien connu que L est un opérateur auto-adjoint positif sur $L^2(M,\mu dx)$, associé à la forme quadratique fermable :

$$q(u) = \int_M (|du|^2 + Wu^2)\mu dx.$$

Des exemples de tels opérateurs sont :

1. Le Laplacien naturel $\Delta = -div\, grad$, où $divX = \sum_j g^{-1/2}\partial_j(g^{1/2}X^j)$ en coordonnées.
2. Le μ-Laplacien $\Delta_\mu = -\frac{1}{\mu}div(\mu\, grad)$, où μ est une fonction C^1 strictement positive sur M.
3. Les opérateurs de Schrödinger $H = \Delta + W$, avec $W \in L^\infty_{loc}$ une fonction positive.

Retournons au cas général. On a une formule de Green :

Proposition 1.2.1 *Si u et v sont des fonctions lisses à support compact,*

$$\int_M (uLv)\mu dx = \int_M (\langle du, dv\rangle + Wuv)\mu dx$$

Notation : on notera $d\nu$ la mesure μdx.

Remarque 1.2.1 *La restriction aux potentiels W positifs sert à assurer que L satisfasse au principe du maximum.*

Etant donné $\Omega \subset M$ un ouvert relativement compact, soit L_Ω l'opérateur auto-adjoint associé à la restriction de la forme quadratique q à l'espace de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega, d\nu)$ (c'est-à-dire avec conditions de Dirichlet au bord). On peut considérer le noyau de Green G_Ω de L sur Ω avec conditions au bord de Dirichlet, prolongé par zéro en-dehors de $\Omega \times \Omega$; il possède les propriétés suivantes :

1. $G_\Omega \geq 0$,
2. G_Ω est fini en-dehors de la diagonale.
3. $G \mid_{\partial(\Omega\times\Omega)}= 0$,
4. Pour tout $f \in L^2(\Omega, d\nu)$, $g := G_\Omega f$ (où $G_\Omega f(x) = \int_\Omega G_\Omega(x,y)f(y)d\nu(y)$) satisfait :

$$g \in \mathcal{D}(L_\Omega), \text{ et } L_\Omega g = f$$

Par le principe du maximum, G_Ω est croissante par rapport à Ω :

$$\text{si } \Omega_1 \subset \Omega_2,\ G_{\Omega_2} \geq G_{\Omega_1},$$

de sorte qu'on peut définir une limite ponctuelle :

$$G(x,y) := \lim_{\Omega \to M} G_\Omega(x,y) \text{ pour tous } x \neq y$$

Définition 1.2.1 *On dit que (M,g) est* ***non-parabolique*** *pour L si $G(x,y) < \infty$ pour un certain couple (x,y).*

En appliquant l'inégalité de Harnack, on voit que c'est équivalent à ce que $G(x,y) < \infty$ pour tous $x \neq y$ (pour un exposé sur la notion de parabolicité pour le Laplacien usuel et une preuve de ce résultat, on renvoit à l'article de Grigor'yan [34]). Il y a aussi une caractérisation de la non-parabolicité en terme de la « forme de Dirichlet » q de L, dont nous ferons un usage constant (pour une preuve et des références, voir [3], p.46-47) :

Théorème 1.2.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *(M,g) est non-parabolique pour L.*
2. *Il existe un ouvert relativement compact Ω de M et une constante $C \geq 0$ tels que pour tout $f \in C_0^\infty(M)$,*

$$\int_\Omega f^2 d\nu \leq Cq(f)$$

3. *La propriété (2) est vraie pour tout ouvert relativement compact Ω de M.*

Preuve :

On le montre pour $L = \Delta$.
(1) $\Rightarrow$ (2) : Soit $v \in C_0^\infty(M)$, et $\varphi \in C^\infty(M)$, alors en intégrant par parties

$$\int v^2 \Delta(\varphi^2) = 4 \int v\varphi \langle dv, d\varphi \rangle.$$

On pose $\chi = \varphi^2$, et on choisit χ de telle sorte que $\Delta\chi = |d\chi|^2$. Pour cela, on fixe Ω, et un certain x en-dehors de Ω. On prend $\chi = \log G_x$, où $G_x = G(x,.)$ est la fonction de Green (qui est par hypothèse finie en-dehors du point x). En fait, sur $M \setminus \{x\}$, on a $\Delta G_x = 0$, et donc

$$\Delta \log(G_x) = \frac{|dG_x|^2}{G_x^2} = |d\log(G_x)|^2.$$

Pour ce choix de χ, on obtient :

$$\int v^2|d\chi|^2 = 4\int v\langle dv, d\chi\rangle,$$

et il suffit d'appliquer Cauchy-Schwarz au membre de droite pour obtenir que

$$\int v^2|d\chi|^2 \leq 16\int |dv|^2.$$

Il reste à justifier qu'on peut trouver un domaine Ω sur lequel $|d\chi| \geq \epsilon > 0$, et pour cela il suffit de montrer que G_x est non-constante. Mais G_x est solution de

$$\Delta G_x = \delta_x,$$

la mesure de Dirac en x, au sens des distributions, donc G_x est non-constante au voisinage de x, d'où, puisque G_x est continue sur $M \setminus \{x\}$, l'existence d'un domaine Ω convenable.

(3) $\Rightarrow$ (1) : (2) implique que la capacité de tout ouvert relativement compact non vide est strictement positive, où la capacité d'un ouvert Ω est définie par :

$$\mathrm{Cap}(\Omega) = \inf\left\{\int_M |\nabla u|^2 : u \in C_0^\infty(M) \text{ telle que } u|_\Omega \equiv 1\right\}.$$

De plus, d'après [34], Proposition 4.1, pour tout ouvert relativement compact U et pour tout $y \in U$,

$$\inf_{x\in\partial U} G(x,y) \leq \mathrm{cap}(U)^{-1} \leq \sup_{x\in\partial U} G(x,y).$$

On en déduit que si x et y sont distincts, $G(x,y) < \infty$.

(2) $\Rightarrow$ (3) sera montré, dans un cadre plus général, dans la deuxième partie de cette thèse (plus précisément dans la Proposition 2.7.1) ; nous n'écrivons donc pas la preuve à présent.

$\square$

Corollaire 1.2.1 *S'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $W > \varepsilon$ sur un ouvert, alors (M, g) est non-parabolique pour $\Delta_\mu + W$.*

Exemple 1.2.1 *$\mathbb{R}^n$ est non-parabolique pour Δ si et seulement si $n > 2$. Plus généralement, toute variété Riemannienne complète satisfaisant une inégalité de Sobolev d'indice $n > 2$:*

$$||f||_{\frac{2n}{n-2}} \leq C||\nabla f||_2, \forall f \in C_0^\infty$$

est non-parabolique pour Δ (c'est une conséquence facile du Théorème 1.2.1). Un exemple de telle variété autre que $\mathbb{R}^n$ est la somme connexe de plusieurs copies de $\mathbb{R}^n$, pour $n > 2$ (cf [10]).

1.3 Conséquences pour $L^{-1/2}$

Dans cette partie, on considère comme précédemment un opérateur $L = \Delta_\mu + W$, W positif, qui est non-parabolique, et on passe en revue quelques propriétés de l'opérateur $L^{-1/2}$ qui viennent de la non-parabolicité de L. On conserve les notations de la partie précédente. Nous allons définir un opérateur $L^{-1/2}$ de deux façons différentes. Nous devrons montrer à la fin que ces deux définitions sont consistantes, c'est-à-dire qu'elles coïncident dans un certain sens.

Définition 1.3.1 *On définit deux opérateurs non bornés $L_s^{1/2}$ et $L_s^{-1/2}$ par le calcul fonctionnel : si f est borélienne sur $\mathbb{R}$, on peut définir*

$$f(L) := \int_0^\infty f(\lambda) dP_\lambda,$$

où dP_λ est la mesure-projection associée à l'opérateur auto-adjoint L (voir ([51])). Alors $L_s^{1/2} := f(L)$ avec $f(x) = x^{1/2}$, et $L_s^{-1/2} := g(L)$ avec $g(x) = x^{-1/2}$.

Remarque 1.3.1
1. *Puisque (M, g) est non-parabolique pour L, les inégalités du Théorème 1.2.1 impliquent que $Ker_{L^2}(L) = \{0\}$: si $u \in Ker_{L^2}(L)$, $q(u) = 0$ par définition de q ; par conséquent, $P_{\{0\}} = 0$ et on a bien le droit de prendre $g(x) = x^{-1/2}$ dans la définition ci-dessus, même si g n'est pas définie en 0.*
2. *L'indice « s » signifie « spectral ».*
3. *Par construction, $\mathcal{D}(L_s^{1/2}) = \mathcal{D}(q)$ (où $\mathcal{D}$ est une notation pour le domaine d'un opérateur).*

La non-parabolicité de (M, g) pour L nous permet de définir $L^{-1/2}$ d'une autre manière, que nous décrivons à présent. Soit H_0^1 la clôture de $C_0^\infty(M)$ pour la norme

$$N(u) = ||L_s^{1/2} u||_2 = \left(\int_M (|du|^2 + W u^2) d\nu \right)^{1/2}.$$

C'est un espace de Hilbert, et on a la paraphrase suivante de l'implication (1) $\Rightarrow$ (3) du Théorème 1.2.1, qui nous permet d'interpréter H_0^1 comme un espace de fonctions :

Proposition 1.3.1 *Si M est non-parabolique pour L, alors l'injection $C_0^\infty(M) \hookrightarrow W_{loc}^{1,2}(M)$ se prolonge continûment en :*

$$H_0^1 \hookrightarrow W_{loc}^{1,2}(M, d\nu),$$

c'est-à-dire que pour tout U ouvert relativement compact, la restriction à U des éléments de H_0^1 est incluse dans $W^{1,2}$, et il existe une constante C_U telle que

$$\big| |f|_U| \big|_{W^{1,2}(U)} \leq C_U ||f||_{H_0^1}, \forall f \in H_0^1,$$

ou de façon équivalente

$$\int_U f^2 \leq C_U ||f||^2_{H_0^1}, \forall f \in H_0^1.$$

On définit alors :

Définition 1.3.2 *L'opérateur $L_s^{1/2}$, restreint à $C_0^\infty(M)$, s'étend en une isométrie :*

$$L_a^{1/2} : H_0^1 \longrightarrow L^2(M, d\nu)$$

(rappelons que $d\nu$ est la mesure μdx).

La proposition suivante montre que les deux opérateurs $L_s^{1/2}$ et $L_a^{1/2}$ sont en fait égaux :

Proposition 1.3.2
1. *$C_0^\infty(M)$ est un coeur pour $L_s^{1/2}$.*

2. $\mathcal{D}(L_s^{1/2}) = H_0^1 \cap L^2$, *et les restrictions à* $H_0^1 \cap L^2$ *des deux opérateurs* $L_a^{1/2}$ *et* $L_s^{1/2}$ *sont égales.*

Preuve :

(1) : Soit A la restriction de $L_s^{1/2}$ à $C_0^\infty(M)$. On doit montrer que

$$Im(A \pm i)^\perp = \{0\}.$$

Soit $f \in Im(A+i)^\perp$. Alors pour toute fonction $g \in C_0^\infty(M)$,

$$\langle f, (A+i)g\rangle = 0.$$

On peut écrire $f = (L_s^{1/2} + i)u$, où $u \in L^2$, puisque $L_s^{1/2}$ est auto-adjoint. Alors si $g \in C_0^\infty(M)$,

$$0 = \langle f, (A+i)g\rangle = \langle (L_s^{1/2}+i)u, (L_s^{1/2}+i)g\rangle = \langle u, (L_s+1)g\rangle,$$

par le Théorème Spectral. Mais $C_0^\infty(M)$ est un coeur pour L_s+1, et donc $u \in \mathcal{D}(L_s+1)$ et $(L_s+1)u = 0$. Puisque $L_s \geq 0$, -1 n'est pas valeur propre de L_s, et on en déduit que $u = 0$, puis que $f = 0$.
La preuve pour $A - i$ est identique.

(2) : Définissons une nouvelle forme quadratique Q sur C_0^∞ par

$$Q(f) = ||f||_2^2 + \langle Lf, f\rangle = ||f||_2^2 + ||L_s^{1/2} f||_2^2,$$

et une forme quadratique $\bar{Q}$ sur $H_0^1 \cap L^2$ par

$$\bar{Q}(f) = ||f||_2^2 + ||L_a^{1/2} f||_2^2 = ||f||_2^2 + ||f||_{H_0^1}^2.$$

Par une conséquence facile de la non-parabolicité dans la Proposition 1.3.1, $\bar{Q}$ est fermée. C'est donc une extension fermée de Q, qui est associée à un opérateur auto-adjoint S tel que $\mathcal{D}(S^{1/2}) = \mathcal{D}(\bar{Q})$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\bar{Q})$,

$$\bar{Q}(f) = \langle Sf, f\rangle = ||S^{1/2} f||_2^2.$$

Mais puisque L_s est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(M)$, il possède une unique extension auto-adjointe, et on obtient donc que $S = L + 1$. En se servant du fait que

$$\sqrt{L_s} \leq \sqrt{L_s + 1} \leq \sqrt{L_s} + 1,$$

on obtient que $\mathcal{D}(\sqrt{L_s+1}) = \mathcal{D}(\sqrt{L_s})$, et donc $\mathcal{D}(\bar{Q}) = \mathcal{D}(L_s^{1/2})$. D'après la première partie de la Proposition 1.3.2, $\sqrt{L_s+1}|_{C_0^\infty(M)}$ est essentiellement auto-adjoint, et puisque

$$\bar{Q}(f) = \left|\left|\sqrt{L_s+1} f\right|\right|_2^2, \forall f \in \mathcal{D}(\bar{Q}),$$

on conclut que $C_0^\infty(M)$ est dense dans $\mathcal{D}(\bar{Q}) = H_0^1 \cap L^2$ pour la norme donnée par $\sqrt{\bar{Q}}$. Puisque $L_a^{1/2}$ et $L_s^{1/2}$ coïncident sur $C_0^\infty(M)$, par un argument de densité ils coïncident aussi sur $H_0^1 \cap L^2$.

$\square$

On en déduit le Lemme suivant :

Lemme 1.3.1 *Si u et v sont dans $H_0^1 \cap L^2$, alors*

$$\langle L_a^{1/2} u, v\rangle = \langle u, L_a^{1/2} v\rangle$$

Preuve :

Cela vient du fait que $L_a^{1/2}$ and $L_s^{1/2}$ coïncident sur $H_0^1 \cap L^2$ (d'après la Proposition 1.3.2), et que $L_s^{1/2}$ est auto-adjoint.

□

Proposition 1.3.3 $L_a^{1/2} : H_0^1 \to L^2$ *est un isomorphisme.*

Preuve :

$L_a^{1/2}$ est l'unique extension continue de l'isométrie $L_s^{1/2} : C_0^\infty(M) \to L^2$, donc c'est aussi une isométrie ; elle est donc injective.
Pour la surjectivité : puisque l'image de $L_a^{1/2}$ est fermée (car $L_a^{1/2}$ est une isométrie), il suffit de montrer que $(Im\, L_a^{1/2})^\perp = \{0\}$. Soit donc $w \in (Im\, L_a^{1/2})^\perp \subset L^2$. Alors pour tout $u \in C_0^\infty(M)$,

$$\langle w, L_s^{1/2} u\rangle = 0.$$

Puisque $C_0^\infty(M)$ est un coeur pour $L_s^{1/2}$, on obtient :

$$w \in \mathcal{D}(L_s^{1/2}) \text{ et } L_s^{1/2} w = 0.$$

On en déduit par le Lemme 1.3.1 que $w \in H_0^1$ et $L_a^{1/2} w = 0$. Puisque $L_a^{1/2}$ est injective, $w = 0$ dans H_0^1 et donc dans L^2 par le Théorème 1.2.1.

□

En résumé, on a donc défini un opérateur :

$$L^{-1/2} := L_s^{-1/2} = L_a^{-1/2},$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1. C'est une isométrie bijective de L^2 dans H_0^1.
2. En tant qu'opérateur non borné, il a pour domaine $L^{1/2}(H_0^1 \cap L^2)$.

Notation : pour $1 \leq p \leq \infty$, on notera L_0^p l'espace des fonctions L^p pour la mesure $d\nu$, qui sont à support compact.

Plus tard, on s'intéressera à l'opérateur $L^{-1/2} V L^{-1/2}$, lorsque V est à support compact (ici, on a identifié V avec l'opérateur « multiplication par V »). Pour montrer qu'il est compact, on aura besoin de la Proposition suivante :

Proposition 1.3.4 *L'espace des fonctions L^2 à support compact, L_0^2, est inclus dans $\mathcal{D}(L_s^{-1/2})$. Plus précisément, étant donné un ouvert relativement compact K, il existe une constante C_K telle que pour toute fonction $v \in L_0^2$ à support inclus dans K,*

$$||L_s^{-1/2} v||_2 \leq C_K ||v||_2.$$

Plus généralement, si n est la dimension de M, alors pour tout $n \leq p \leq \infty$, il existe une constante $C(p,K)$ telle que pour toute fonction $v \in L_0^{\frac{2p}{p+2}}$ à support inclus dans K,

$$||L_s^{-1/2}v||_2 \leq C(p,K)||v||_{\frac{2p}{p+2}}.$$

Preuve de la Proposition 1.3.4 :
La preuve est par dualité. On utilisera le Lemme suivant :

Lemme 1.3.2 *A chaque $v \in L_0^{\frac{2p}{p+2}}$, on associe la forme linéaire*

$$\varphi_v : w \in H_0^1 \cap L^{\frac{2p}{p-2}} \hookrightarrow \langle v, w\rangle$$

Alors pour tout $n \leq p \leq \infty$, φ_v s'étend de façon unique en un élément de $(H_0^1)'$, avec $||\varphi_v|| \leq C(p,K)||v||_{\frac{2p}{p+2}}$, où K est un ouvert relativement compact contenant le support de v.

Le Lemme 1.3.2 est une conséquence de la non-parabolicité de L ; on le prouve plus loin.
Achevons la preuve de la Proposition 1.3.4. Soit $u \in H_0^1$ tel que $L_a^{1/2}u \in L_0^2$. On doit montrer que $u \in L^2$. Soit $v \in L_0^2$ défini par $v := L_a^{1/2}u$. D'après le Lemme 1.3.2, il existe $h \in H_0^1$ tel que $\varphi_v = \langle h, .\rangle_{H_0^1} = \langle L^{1/2}h, L^{1/2}.\rangle$. On pose $f = L^{1/2}h$, et puisque $\mathcal{D}(L_s^{1/2}) = H_0^1 \cap L^2$, on obtient que $f \in \mathcal{D}((L_s^{1/2})^\star)$ avec $(L_s^{1/2})^\star f = v$. Mais $L_s^{1/2}$ est auto-adjoint, donc $f \in H_0^1 \cap L^2$ et $L_a^{1/2}f = L_s^{1/2}f = v = L_a^{1/2}u$. $L_a^{1/2}$ étant injective, $u = f \in L^2$.
Pour l'inégalité sur la norme, on remarque que $||u||_{L^2} = ||f||_{L^2} = ||h||_{H_0^1} = ||\varphi_{L^{1/2}u}||$, et on applique le Lemme 1.3.2.

□

Preuve du Lemme 1.3.2 :
Soit K un ouvert relativement compact contenant le support de v dans son intérieur. Soit $\rho \in C_0^\infty(M)$ tel que $\rho = 1$ sur le support de v, et $\rho = 0$ en-dehors de K. Si $w \in C_0^\infty(M)$,

$$|\varphi_v(w)| \leq ||v||_{\frac{2p}{p+2}}||\rho w||_{L^{\frac{2p}{p-2}}(K)}.$$

On traite d'abord le cas $p = \infty$, i.e. $\frac{2p}{p-2} = \frac{2p}{p+2} = 2$. Dans ce cas, on majore $||\rho w||_2$ par $||\rho||_\infty ||w||_2$. Par non-parabolicité, il existe C_K tel que

$$||w||_{L^2(K)} \leq C_K||w||_{H_0^1},$$

indépendemment de w.
Par conséquent,

$$|\varphi_v(w)| \leq C_K||v||_{L^2}||w||_{H_0^1},$$

ce qui prouve le résultat dans ce cas-là.

Pour $n \leq p < \infty$, on se sert du fait que K satisfait l'inégalité de Sobolev : il existe une constante C_K telle que

$$||u||_{\frac{2p}{p-2}} \leq C_K||\nabla u||_2, \forall u \in C_0^\infty(M) \text{ tel que } \mathit{supp}\, u \subset K.$$

Donc

$$||\rho w||_{L^{\frac{2p}{p-2}}(K)} \leq C_K||\nabla(\rho w)||_2 \leq C'_K\left(||w||_{L^2(K)} + ||\nabla w||_{L^2(K)}\right).$$

Puisque $L = \Delta_\mu + W$ avec $W \geq 0$ et μ est bornée inférieurement par une constante strictement positive sur K, on a pour toute fonction $u \in C_0^\infty(M)$:

$$||\nabla u||_{L^2(K)} \leq C||u||_{H_0^1}.$$

On conclut alors comme précédemment.

□

On obtient immédiatement

Corollaire 1.3.1 *Pour $V \in L_0^p$ avec $n \leq p \leq \infty$, l'opérateur $T := L_s^{-1/2}V$ est borné sur L^2.*

Preuve :

Si K est un ouvert relativement compact contenant le support de V, l'opérateur « multiplication par V » est borné de L^2 dans $L^{\frac{2p}{p+2}}(K)$. On applique alors la Proposition 1.3.4.

□

De plus, la non-parabolicité de M donne :

Proposition 1.3.5 *Soit M non-parabolique pour L. Si V est un potentiel dans L_0^p pour un $n < p \leq +\infty$, l'opérateur*

$$VL_a^{-1/2} : L^2 \longrightarrow L^2$$

est compact.

Preuve :

Soit K un ouvert relativement compact à bord lisse contenant le support de V. Soit $\rho \in C_0^\infty$ tel que $\rho|_K = 1$. Le critère de non-parabolicité du Théorème 1.2.1 se traduit par :

$$L_a^{-1/2} : L^2 \longrightarrow W_{loc}^{1,2}$$

On considère les compositions suivantes :

$$W_{loc}^{1,2} \to W^{1,2}(K) \hookrightarrow L^{\frac{2p}{p-2}}(K) \to L^2(K),$$

où la flèche à gauche est la multiplication par ρ, celle du milieu est l'inclusion de Sobolev compacte (c'est là qu'on se sert du fait que $p > n$), et celle de droite est la multiplication par V. La composition de ces trois opérateurs est donc compacte, et est en fait égale à l'opérateur « multiplication par V », envoyant $W_{loc}^{1,2}$ dans $L^2(K)$. On obtient ainsi le résultat.

□

Finalement, le résultat principal de cette partie est :

Théorème 1.3.1 *Soit $V \in L_0^q$ pour un certain $\frac{n}{2} < q \leq +\infty$ un potentiel à support compact.*
Alors l'opérateur

$$L_s^{-1/2}VL_a^{-1/2} : L^2 \longrightarrow L^2$$

est auto-adjoint, compact.

Preuve :

On écrit :

$$L_s^{-1/2} V L_a^{-1/2} = (L_s^{-1/2} W_1)(W_2 L_a^{-1/2}),$$

avec $W_1 = W_2 = V^{1/2} \in L^p$ et $p = 2q > n$. Soit $T_1 = L_s^{-1/2} W_1$, et $T_2 = W_2 L_a^{-1/2}$. D'après le Corollaire 1.3.1, $T_1 : L^2 \to L^2$ est borné, et d'après la Proposition 1.3.5, $T_2 : L^2 \to L^2$ est compact. Ainsi, $T := L_s^{-1/2} V L_a^{-1/2} = T_1 T_2$ est compact.
Pour montrer que T est auto-adjoint, on considère tout d'abord le cas où $V \in L_0^\infty$; comme précédemment, on décompose $V = W_1 W_2$, avec $W_1 = W_2 = V^{1/2}$. Il suffit de montrer que dans ce cas, $T_1^* = T_2$, c'est-à-dire que pour tous $u, v \in L^2$,

$$\langle L_s^{-1/2} W u, v \rangle = \langle u, W L_a^{-1/2} v \rangle.$$

C'est une conséquence d'une adaptation du Lemme 1.3.1 : posons $f = L_s^{-1/2} W u$ et $g = L_a^{-1/2} v$, alors on veut montrer que

$$\langle f, L^{1/2} g \rangle = \langle L^{1/2} f, g \rangle$$

Le Lemme 1.3.1 nous dit que c'est vrai si $f, g \in L^2 \cap H_0^1$, ce qui se produit lorsque $v \in \mathcal{D} := L^{1/2}(H_0^1 \cap L^2)$. Maintenant, $\mathcal{D}$ contient $L^{1/2}(C_0^\infty)$, et donc est dense dans L^2, et on conclut par continuité de T_1 et de T_2.
Retournons au cas général. On prend une suite d'approximations (V_k) :

$$V_k := \inf(k, V)$$

Pour tout k, $V_k \in L_0^\infty$ et $V_k \to V$ en norme L^q ; de plus, le support de V_k est contenu dans le support de V. Posons $T_{1,k} := V_k^{1/2} L_a^{-1/2}$ et $T_{2,k} := L_s^{-1/2} V_k^{1/2}$. On a $V_k^{1/2} \to V^{1/2}$ en norme L^p, donc par la preuve de la Proposition 1.3.4 (resp. par la preuve de la Proposition 1.3.5), $T_{1,k}$ (resp. $T_{2,k}$) converge vers T_1 (resp. vers T_2) pour la topologie forte des opérateurs. On en déduit que la suite d'opérateurs $(L_s^{-1/2} V_k L_a^{-1/2})_k$ converge vers $L_s^{-1/2} V L_a^{-1/2}$ pour la topologie forte des opérateurs. Puisque chacun des opérateurs $L_s^{-1/2} V_k L_a^{-1/2}$ est auto-adjoint, $L_s^{-1/2} V L_a^{-1/2}$ l'est aussi.

□

1.4 Résultat principal

1.4.1 Un résultat préliminaire

On prouve maintenant le Théorème 1.1.5. Pour un potentiel V, définissons $N_-(V)$ comme étant le cardinal (en comptant les multiplicités) de $Spec(L+V) \bigcap (-\infty, 0)$. Rappelons deux autres définitions de $N_-(V)$, la seconde utilisant le fait que $L+V$ est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(M)$ (pour une preuve, voir par exemple [53]). Rappelons aussi que nous notons q la forme quadratique associée à $L+V$.

Proposition 1.4.1

$$\begin{aligned} N_-(V) &= \sup\{dim(F) : F \subset \mathcal{D}(q) \ \textit{et} \ q|_F \ \textit{définie négative}\} \\ &= \sup\{dim(F) : F \subset C_0^\infty(M) \ \textit{et} \ q|_F \ \textit{définie négative}\} \end{aligned}$$

Remarquons que la définition

$$N_-(V) = \sup\{dim(F) : F \subset C_0^\infty \text{ et } q|_F \text{ définie négative}\}$$

a un sens même si $L+V$ n'est pas essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(M)$. En fait, on va montrer qu'avec cette définition de $N_-(V)$ et sans supposer que $L+V$ soit auto-adjoint, l'existence d'une solution strictement positive φ de $(L+V)\varphi = 0$ en-dehors d'un compact implique que $N_-(V)$ est fini. On va à présent montrer le Théorème (potentiel support compact), dont nous rappelons l'énoncé :

Théorème 1.4.1 *Soit L un opérateur du type : $L = \Delta_\mu + W$ avec $W \geq 0$, où $\Delta_\mu = -\frac{1}{\mu} div(\mu\, grad)$ avec μ une fonction C^1 strictement positive est un Laplacien à poids. Soit V un potentiel dans L^p à support compact, oú $p > \frac{n}{2}$. Alors*

$$\sup\{dim(F) : F \subset C_0^\infty \text{ et } q|_F \leq 0\},$$

où q est la forme quadratique associée à $L+V$, est fini. Si de plus $V \in L^2$ (ce qui est le cas si $n \geq 4$), $Ker_{L^2}(L+V) := \{\varphi \in L^2 : (L+V)\varphi = 0\}$ est de dimension finie.

Preuve :

Puisque $N_-(V) \leq N_-(-V_-)$, où $V_- = -\inf(V, 0)$ est la partie négative de V, on peut supposer que V est négatif. On distingue deux étapes dans la preuve :
<u>Etape 1 : cas où L est non-parabolique :</u>
Pour ce cas-ci, nous avons besoin des deux Lemmes suivants :

Lemme 1.4.1 *Comme précédemment, on note H_0^1 l'espace naturellement associé à L. Soit $u \in C_0^\infty(M)$, tel que $\langle (L+V)u, u\rangle \leq 0$. Posons $v := L^{1/2}u$.*
Alors

$$||v||_2^2 \leq \langle L^{-1/2}(-V)L^{-1/2}v, v\rangle.$$

Preuve :

L'hypothèse est que

$$\langle Lu, u\rangle \leq \langle (-V)u, u\rangle$$

En utilisant le fait que $\langle Lu, u\rangle = \langle L^{1/2}u, L^{1/2}u\rangle = ||v||_2^2$, on obtient :

$$||v||_2^2 \leq \langle (-V)L^{-1/2}v, L^{-1/2}v\rangle,$$

et il reste à montrer que

$$\langle (-V)L^{-1/2}v, L^{-1/2}v\rangle = \langle L^{-1/2}(-V)L^{-1/2}v, v\rangle \tag{1.4}$$

Soit $w := L^{-1/2}(-V)L^{-1/2}v = L^{-1/2}(-V)u$. L'égalité 1.4 est équivalente à :

$$\langle L^{1/2}w, u\rangle = \langle w, L^{1/2}u\rangle.$$

Maintenant, u appartient à $H_0^1 \cap L^2$, et puisque l'opérateur $L^{-1/2}VL^{-1/2} : L^2 \to L^2$ est borné, on obtient $w \in L^2$. De plus, par l'inégalité de Hölder, $Vu \in L^2$ (puisque $u \in C_0^\infty$), donc $w \in H_0^1$. On conclut en appliquant le Lemme 1.3.1.

□

Lemme 1.4.2 *Si S est un sous-espace de L^2 tel que $S \subset \{v \in L^2 : ||v||_2^2 \leq \langle Tv, v\rangle\}$, où $T := L^{-1/2}(-V)L^{-1/2}$, alors la dimension de S est inférieure ou égale au nombre de valeurs propres (avec multiplicité) de T qui sont supérieures ou égales à 1.*

Preuve :

C'est une conséquence du principe du min-max classique.

□

Fin de la preuve de l'étape 1 :
Soit $F \subset C_0^\infty$ tel que $L + V \leq 0$ sur F. On a, par définition, $F \subset H_0^1 \cap L^2$. Posons $S := L^{1/2}F \subset L^2$. D'après le Lemme 1.4.1, $S \subset \{v \in L^2 : ||v||_2^2 \leq \langle Tv, v\rangle\}$, oú $T = L^{-1/2}(-V)L^{-1/2}$. Donc par le Lemme 1.4.2, on obtient que la dimension de S est inférieure au nombre de valeurs propres supérieures ou égales à 1 de T. Puisque $L^{1/2}$ est injective, $dim(F) = dim(S)$, donc $dim(F)$ est inférieure au nombre de valeurs propres de T supérieures à 1. D'après le Théorème 1.3.1, T est un opérateur auto-adjoint compact, donc le nombre de valeur propres de T supérieures ou égales à 1 est fini. Puisque par la Proposition 1.4.1 $N_-(V)$ est inférieur au nombre de valeurs propres de T supérieures ou égales à 1, $N_-(V)$ est fini, ce qui achève la première étape.
Etape 2 : cas général (L n'est plus supposé non-parabolique) :
On écrit :

$$L + V = (L + \rho) + (V - \rho),$$

où $\rho \in C_0^\infty$ est une fonction positive telle que $\rho|_U \geq 1$ pour un certain ouvert U. Posons $\tilde{L} := L + \rho$, et $\tilde{V} := V - \rho$, de telle sorte que $\tilde{L} + \tilde{V} = L + V$. d'après le Corollaire 1.2.1, $\tilde{L}$ est non-parabolique, on peut donc appliquer l'étape 1 à $\tilde{L} + \tilde{V}$, pour conclure que cet opérateur à un nombre fini de valeurs propres strictement négatives.

Il reste à montrer la seconde partie du Théorème, à savoir montrer que $Ker_{L^2}(L+V)$ est de dimension finie. Comme précédemment, il suffit de traiter le cas où L est non-parabolique. Le résultat est alors une conséquence du Lemme suivant :

Lemme 1.4.3 *Si $V \in L_0^p \cap L^2$ pour un certain $p > \frac{n}{2}$, alors*
$Ker_{L^2}(L + V) \subset H_0^1$*, et* $L^{1/2}Ker_{L^2}(L + V) \subset Ker_{L^2}(I + L^{-1/2}VL^{-1/2})$.

Si ce Lemme est vrai, étant donné que $L^{1/2} : H_0^1 \to L^2$ est injective, et que $L^{-1/2}VL^{-1/2} : L^2 \to L^2$ est compact d'après le Théorème 1.3.1, on obtient que $Ker_{L^2}(L + V)$ est de dimension finie.

□

Preuve du Lemme 1.4.3 :
La preuve qu'on en donne s'inspire de celle de la Proposition 1.4 de [11]. Soit $\varphi \in Ker_{L^2}(L+V)$. On a $L\varphi = -V\varphi$, qui est dans L^2 puisque $\varphi \in L^\infty$ par régularité elliptique et $V \in L^2$. On montre d'abord que $\varphi \in H_0^1$. Soit $\rho \in C_0^\infty(M)$, alors pour tout $u \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}
||L^{1/2}(\rho u)||_2^2 &= \langle L(\rho u), \rho u\rangle \\
&= \int_M \left(\rho^2 uLu - \langle \tfrac{d(\rho^2)}{2}, d(u^2)\rangle + \rho u^2 \Delta_\mu \rho\right) d\nu \\
&= \int_M \left(\rho^2 uLu + |d\rho|^2 u^2\right) d\nu
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé une intégration par partie pour la dernière égalité. On prend $\varphi_k \in C_0^\infty(M)$ telle que $\varphi_k \to \varphi$ dans L^2 et $L\varphi_k \to L\varphi$ dans L^2 lorsque $k \to \infty$ (ceci est possible puisque L est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(M)$). Alors, si on applique la formule précédente, on trouve que :

$$\lim_{k\to\infty} ||L^{1/2}(\rho\varphi_k)||_2^2 = \int_M \left((\rho\varphi)^2(-V) + |d\rho|^2\varphi^2\right) d\nu,$$

et puisque $L^2 - \lim_{k\to\infty} \rho\varphi_k = \rho\varphi$ et que la forme quadratique associée à $L^{1/2}$ est fermée, on peut faire $k \to \infty$ dans la formule précédente :

$$||L^{1/2}(\rho\varphi)||_2^2 = \int_M \left((\rho\varphi)^2(-V) + |d\rho|^2u^2\right) d\nu.$$

Fixons maintenant un point $o \in M$, et prenons une suite $\rho_k \in C_0^\infty$, telle que $\rho_k \equiv 1$ sur $B(o,k)$, $\rho_k \equiv 0$ en-dehors de $B(o,k+1)$ et $||d\rho_k||_\infty \leq 2$. En appliquant la formule précédente à $(\rho_k - \rho_l)$, on obtient que pour tous $l \geq k$ tels que $\mathrm{supp}(V) \subset B(o,k)$,

$$\lim_{k,l\to\infty} ||L^{1/2}((\rho_k-\rho_l)\varphi)||_2^2 \leq 4 \lim_{k,l\to\infty} \int_{M\setminus B(o,k)} u^2 d\nu = 0,$$

ce qui montre que $L^{1/2}\varphi \in L^2$.
Etant donné cela, on a :

$$\langle \varphi, (L+V)w\rangle = 0, \forall w \in C_0^\infty.$$

On écrit $(L+V)w = L^{1/2}(L^{1/2}+L^{-1/2}V)w$; $(L^{1/2}+L^{-1/2}V)w \in L^2$ puisque $L^{-1/2}V : L^2 \to L^2$ est borné. De plus, $L^{1/2}(L^{1/2}+L^{-1/2}V)w = (L+V)w \in L^2$, donc $(L^{1/2}+L^{-1/2}V)w \in \mathcal{D}(L^{1/2}) = H_0^1 \cap L^2$. Puisque $\varphi \in H_0^1 \cap L^2$, on peut appliquer le Lemme 1.3.1 pour avoir :

$$\langle \varphi, (L+V)w\rangle = \langle L^{1/2}\varphi, (L^{1/2}+L^{-1/2}V)w\rangle.$$

Maintenant $(L^{1/2}+L^{-1/2}V)w = (I + L^{-1/2}VL^{-1/2})(L^{1/2}w)$. Posons $u = L^{1/2}w \in L^2$, on a alors :

$$\langle L^{1/2}\varphi, (I + L^{-1/2}VL^{1/2})u\rangle = 0.$$

Puisque $L^{1/2}C_0^\infty$ est dense dans L^2, l'égalité précédente est valable pour toute fonction $u \in L^2$, et puisque $(I+L^{-1/2}VL^{1/2})$ est auto-adjoint, on en déduit que $L^{1/2}\varphi \in Ker_{L^2}(I+L^{-1/2}VL^{1/2})$.

□

1.4.2 Preuve du résultat principal

Le but de cette partie est de prouver le résultat annoncé (Théorème 1.4.2) lorsque le potentiel est lisse :

Théorème 1.4.2 *Soit M une variété Riemannienne complète, et soit $H = \Delta + V$ un opérateur de Schrödinger sur M avec potentiel V lisse. On suppose que H est borné inférieurement. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La partie strictement négative du spectre de H consiste en un nombre fini (en comptant les multiplicités) de valeurs propres.*
2. *Il existe une fonction strictement positive φ dans $C^\infty(M)$, solution de $H\varphi = 0$ en-dehors d'un compact.*

De plus, si l'on est dans l'un de ces deux cas, alors $Ker_{L^2}(H)$ est de dimension finie.

Preuve :

Comme nous l'avons déjà dit, le fait que $N_-(V) < \infty$ implique l'existence d'une solution strictement positive φ de $H\varphi = 0$ en-dehors d'un compact a déjà été montré par Fischer-Colbrie dans [28]. Le fait que cette solution soit lisse lorsque V est lisse vient de la régularité elliptique de l'opérateur H. La fonction φ peut être étendue de façon lisse en une fonction strictement positive sur M. Supposons maintenant l'existence d'une telle solution φ, et on veut montrer que $\mathrm{Card}(Spec(H) \cap (-\infty, 0])$ est fini. Si $u \in L^2$ est une fonction propre de H, i.e. $Hu = \lambda u$ pour un certain λ, on peut écrire (puisque $\varphi > 0$) :

$$u = v\varphi,$$

alors

$$(\varphi^{-1} H \varphi) v = \lambda v$$

De plus, si on note $d\nu$ la mesure $\varphi^2 dx$, on a $v \in L^2(d\nu)$. Nous sommes donc amenés à considérer la *transformée de Doob*, qui est la transformation unitaire suivante :

$$\begin{array}{ccc} L^2(d\nu) & \to & L^2(dx) \\ w & \mapsto & \varphi w \end{array}$$

Par cette transformation, l'opérateur sur $L^2(d\nu)$ associé à H est $L := \varphi^{-1} H \varphi$. Puisque les opérateurs H et L sont conjugués par une transformation unitaire, ils ont le même spectre. Il se trouve que L a une expression explicite très simple, dûe au fait que φ satisfait l'équation $H\varphi = 0$ en-dehors d'un compact :

Lemme 1.4.4

$$L = \Delta_{\varphi^2} + q,$$

comme opérateurs agissant sur les distributions, où $q := \varphi^{-1} H \varphi$ *est un potentiel à support compact.*

Preuve :

Si $v \in C_0^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} H(\varphi v) &= \Delta(\varphi v) + V \varphi v \\ &= (\Delta \varphi) v + \varphi(\Delta v) - 2\langle d\varphi, dv \rangle + V \varphi v \\ &= (H\varphi) v + \varphi(\Delta v) - 2\langle d\varphi, dv \rangle \end{aligned}$$

Ainsi

$$Lv = qv + \Delta v - \left\langle \frac{d(\varphi^2)}{\varphi^2}, dv \right\rangle .$$

Mais pour une fonction strictement positive μ, on a :

$$\Delta_\mu v = -\frac{1}{\mu} div(\mu \, grad v) = \Delta v - \frac{1}{\mu} \langle d\mu, dv \rangle,$$

d'où le résultat.

$\square$

Fin de la preuve du Théorème 1.4.2 :
En appliquant le Théorème 1.1.5 à L, on en déduit que L a un nombre fini de valeurs propres négatives. Par conséquent, la même chose est vraie pour H. La conclusion concernant le noyau de H est une conséquence directe du Théorème 1.4.1 appliqué à L.

□

1.4.3 Questions de régularité

Dans cette partie, on considère le cas d'un potentiel non-régulier V. On montre que le résultat que nous avons prouvé reste vrai sous une hypothèse de régularité plus faible :

Théorème 1.4.3 *Soit M une variété Riemannienne complète. Soit $V \in L^\infty_{loc}$ un potentiel tel que $H := \Delta + V$ soit borné inférieurement.*
S'il existe une fonction strictement positive $\varphi \in W^{1,2}_{loc}$ telle que $H\varphi = 0$ au sens faible en-dehors d'un compact, alors $Card(Spec(H)\bigcap(-\infty, 0])$, le cardinal du spectre négatif de H, est fini.

Preuve :

Nous utiliserons le résultat suivant (cf [30], Théorème 8.34) :

Lemme 1.4.5 *Soit $V \in L^\infty_{loc}$ un potentiel, et $H := \Delta + V$. Soit $u \in W^{1,2}_{loc}$ qui satisfait $Hu = 0$ au sens faible dans l'intérieur d'un ouvert lisse Ω.*
Alors pour tout $\alpha \in (0, 1)$ et tout $\Omega' \subset\subset \Omega$, $u \in C^{1,\alpha}(\Omega')$.

Ceci étant donné, expliquons d'abord pourquoi on peut supposer, quitte à modifier φ sur un compact, que $\varphi \in C^{1,\alpha}_{loc}$. Soit K un compact tel que $H\varphi = 0$ en-dehors de K, et soit $\tilde{\Omega}$ un ouvert tel que $\tilde{\Omega} \subset\subset M \setminus K$. Soit $\rho \in C^\infty_0(M)$ une fonction de coupure positive telle que $\rho \equiv 1$ sur $\tilde{K} = M \setminus \tilde{\Omega}$. Posons $u = \rho.1 + (1-\rho)\varphi$; $u \in C^{1,\alpha}_{loc} \cap W^{1,2}$ et $u > 0$. De plus, on a :

Lemme 1.4.6 *En tant que distribution, $Hu \in L^\infty$, et $Hu = 0$ en-dehors d'un compact.*

Preuve :

On a :

$$Hu = H(\rho) + H((1-\rho)\varphi),$$

et donc, étant donné que $\varphi \in C^{1,\alpha}_{loc}(\tilde{\Omega})$ d'après le Lemme 1.4.5, il suffit de montrer que la formule suivante est vraie au sens des distributions :

$$H((1-\rho)\varphi) = (\Delta(1-\rho))\varphi + 2\langle d\rho, d\varphi\rangle$$

Soit $\psi \in C^\infty_0(M)$, alors par définition

$$\begin{aligned} \langle H((1-\rho)\varphi), \psi\rangle &= \langle (1-\rho)\varphi, H\psi\rangle \\ &= \langle (1-\rho)\varphi, \Delta\psi\rangle + \langle (1-\rho)\varphi, V\psi\rangle \end{aligned}$$

Puisque par hypothèse $H\varphi = 0$ en-dehors de K, on peut soustraire $0 = \langle \varphi, H((1-\rho)\psi)\rangle$ au terme de droite. De plus,

$$\langle \varphi, H((1-\rho)\psi)\rangle = \langle \varphi, (\Delta(1-\rho))\psi\rangle + \langle \varphi, (1-\rho)\Delta\psi\rangle - 2\langle \varphi d(1-\rho), d\psi\rangle + \langle (1-\rho)\varphi, V\psi\rangle.$$

On obtient ainsi :

$$\langle H((1-\rho)\varphi), \psi\rangle \quad = \quad -\langle \varphi, (\Delta(1-\rho))\psi\rangle + 2\langle \varphi d(1-\rho), d\psi\rangle$$

Etant donné que φ est dans $C^{1,\alpha}_{loc}$ en-dehors de K, on peut intégrer par parties :

$$\langle \varphi d(1-\rho), d\psi\rangle = \langle d^*(\varphi d(1-\rho)), \psi\rangle,$$

et de plus la formule usuelle :

$$d^*(\varphi d(1-\rho)) = \varphi\Delta(1-\rho) - \langle d\varphi, d(1-\rho)\rangle$$

est valide. D'où

$$\langle H((1-\rho)\varphi), \psi\rangle = \langle \varphi, (\Delta(1-\rho))\psi\rangle + 2\langle\langle d\varphi, d\rho\rangle, \psi\rangle,$$

qui est ce qu'on voulait.

□

Au vu du Lemme 1.4.6, on peut supposer qu'il existe une fonction $\varphi \in C^{1,\alpha}_{loc} \cap W^{1,2}_{loc}$, satisfaisant $H\varphi = 0$ en-dehors d'un compact et telle que $H\varphi \in L^\infty$. On veut suivre la preuve du Théorème 1.4.2 dans le cas d'un potentiel régulier, et pour ce faire on doit montrer que le résultat du Lemme 1.4.4 est toujours vrai. La difficulté est que les calculs de la preuve du Lemme 1.4.4 nécessitent que φ soit C^2_{loc}, alors qu'on a seulement $\varphi \in C^{1,\alpha}_{loc}$. Le Lemme suivant résout cette difficulté :

Lemme 1.4.7 *Pour toutes fonctions $v \in C^\infty_0$, et $\varphi \in C^1_{loc}$,*

$$H(\varphi v) = (H\varphi)v + \varphi(\Delta v) - 2\langle d\varphi, dv\rangle$$

au sens des distributions.

Preuve :

Soit $\psi \in C^\infty_0(M)$. Par définition,

$$\begin{aligned}
\langle H(\varphi v), \psi\rangle &= \langle \varphi v, H\psi\rangle \\
&= \langle \varphi, H(v\psi)\rangle - \langle \varphi, \psi\Delta v\rangle + 2\langle \varphi dv, d\psi\rangle \\
&= \langle vH(\varphi), \psi\rangle - \langle \varphi, \psi\Delta v\rangle + 2\langle d^*(\varphi dv), \psi\rangle
\end{aligned}$$

Puisque $\varphi \in C^{1,\alpha}$, on a la formule suivante

$$d^*(\varphi dv) = \varphi\Delta v - \langle d\varphi, dv\rangle,$$

et on obtient donc

$$\langle H(\varphi v), \psi\rangle = \langle vH(\varphi), \psi\rangle + \langle \varphi\Delta v, \psi\rangle - 2\langle\langle d\varphi, dv\rangle, \psi\rangle,$$

d'où le résultat.

□

Par conséquent, si l'on pose $L := \varphi^{-1}H\varphi$, on a pour toute fonction $v \in C_0^\infty$,

$$Lv = \left(\Delta_{\varphi^2} + q\right) v,$$

où $q = \varphi^{-1}H\varphi$. On obtient donc l'égalité $L = \Delta_{\varphi^2} + q$ en tant qu'opérateurs agissant sur les distributions.
Si le potentiel q est dans L^∞, alors la preuve que nous avons donnée du Théorème 1.4.2 dans le cas régulier fonctionne. Mais le fait que q soit dans L^∞ est une conséquence (d'après le Lemme 1.4.6) de nos hypothèses : en effet, $H\varphi \in L^\infty$ et φ est continue.

□

1.4.4 Deux preuves alternatives du résultat principal

Première preuve alternative Dans ce paragraphe, nous expliquons comment démontrer le Théorème 1.1.5, sans l'assertion concernant le noyau, par une méthode différente. Nous devons l'idée de la preuve à Philippe Castillon. Soit $H := L + V$. Nous introduisons tout d'abord quelques notations.

Nous noterons $N_\lambda(H)$ le cardinal de $Spec(H) \cap (-\infty, \lambda)$, i.e. $\sup\{dim(W)\}$, pour W sous-espace de C_0^∞ sur lequel la forme quadratique $q - \lambda$ est strictement négative (rappelons que q est la forme quadratique associée à H). Pour $K \subset M$ la clôture d'un ouvert lisse relativement compact de M, on note $N_{K,\lambda}$ (resp. $N_{M\setminus K,\lambda}$) le cardinal de $Spec(H_K) \cap (-\infty, \lambda)$ (resp. $Spec(H_{M\setminus K}) \cap (-\infty, \lambda)$), où H_K (resp. $H_{M\setminus K}$) est H sur K (resp. $M \setminus K$) avec conditions au bord de Neumann. De façon équivalente, $N_{K,\lambda} = \sup\{dim(W)\}$ (resp. $N_{M\setminus K,\lambda} = \sup\{dim(W)\}$), où W est un sous-espace de $C^\infty(K)$ (resp. de $C_0^\infty(M \setminus K)$) sur lequel la forme quadratique $q - \lambda$ (resp. $H_{M\setminus K} - \lambda$) est strictement négative. Avec ces notations, on a le résultat classique suivant (voir [53], Chapitre 15, bien que le résultat ne soit pas écrit exactement tel que nous le présentons) :

Lemme 1.4.8 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$N_\lambda \leq N_{K,\lambda} + N_{M\setminus K,\lambda}$$

Preuve :

Soit W un sous-espace de C_0^∞ sur lequel la forme quadratique associée à $H - \lambda$ soit strictement négative. Soit $\varphi \in W \setminus \{0\}$. On a

$$q(\varphi) < \lambda||\varphi||_2^2.$$

Soit $\varphi_1 = \varphi|_K$ et $\varphi_2 = \varphi|_{M\setminus K}$. Alors $\varphi_1 \in C^\infty(K)$ et $\varphi_2 \in C_0^\infty(M \setminus K)$. Si l'on peut montrer soit que$\frac{q(\varphi_1)}{||\varphi_1||_2^2} < \lambda$, soit que $\frac{q(\varphi_2)}{||\varphi_2||_2^2} < \lambda$, alors on a le résultat. Supposons que ce ne soit pas le cas, alors

$$q(\varphi_1) \geq \lambda||\varphi_1||_2^2,$$

et

$$q(\varphi_2) \geq \lambda||\varphi_2||_2^2.$$

Mais $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, et puisque φ_1 et φ_2 ont des supports disjoints, $q(\varphi) = q(\varphi_1) + q(\varphi_2)$ et $||\varphi||_2^2 = ||\varphi_1||_2^2 + ||\varphi_2||_2^2$. En conséquence, on obtient

$$q(\varphi) \leq \lambda||\varphi||_2^2,$$

ce qui est impossible.

□

Maintenant, par la théorie elliptique standard, $N_{K,\lambda}$ est fini, pour tout K comme ci-dessus et tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour montrer le Théorème 1.1.5, on a seulement besoin de trouver un K convenable tel que $N_{M\setminus K,0}$ soit fini. Prenons K lisse contenant le support de V. Alors $H_{M\setminus K}$ est juste l'opérateur L avec conditions de Neumann sur le bord ∂K. Mais L est un opérateur positif, ce qui implique que $N_{M\setminus K,0} = 0$.

□

Remarque 1.4.1 *De prime abord, on pourrait penser que le Lemme 1.4.8, combiné avec le Théorème 1.1.2 devrait donner une preuve du Théorème 1.4.2 dans le cas général (c'est-à-dire sans supposer V à support compact) : en effet, $N_{K,0}$ est toujours fini, et on pourrait croire que le Théorème 1.1.2 donne que $N_{M\setminus K,0} = 0$ si K est choisi de telle sorte que $H\varphi = 0$ en-dehors de K. Le problème est que le Théorème 1.1.2 donne seulement la positivité de H restreint à $M \setminus K$ avec conditions au bord de Dirichlet, et pas de Neumann. En général, l'infimum du spectre pour les conditions au bord de Dirichlet est supérieur à l'infimum du spectre pour les conditions au bord de Neumann, donc l'opérateur de Neumann n'est pas nécessairement positif. Bien sûr, si la fonction φ satisfait les conditions de Neumann au bord, alors une petite adaptation du Lemme 1.1.2 montre que l'opérateur $L + V$ avec conditions au bord de Neumann est positif. Cependant, la méthode de Fischer-Colbrie [28] ne donne pas l'existence d'une telle fonction φ sous l'hypothèse que le spectre strictement négatif est fini.*

Deuxième preuve alternative Nous expliquons comment adapter certains de nos arguments pour ne pas à avoir recours à la transformée de Doob. Soit φ une fonction strictement positive telle que $H\varphi = 0$ en-dehors d'un compact. On peut supposer que φ est définie sur M. Soit $\tilde{V}$ un potentiel positif à support compact, dans L^∞, tel que $\tilde{V}\varphi \geq |H\varphi|$. Alors

$$(H + \tilde{V})\varphi \geq 0,$$

ce qui implique par le Théorème 1.1.2 que $H + \tilde{V} \geq 0$. Soit $L := H + \tilde{V}$, qui est donc un operateur de Schrödinger positif :

$$L = \Delta_\mu + W,\ W \in L^\infty_{loc}.$$

La différence avec ce qu'on a fait avant, est que W n'est plus supposé positif. Nous devons à Yehuda Pinchover la remarque selon laquelle la théorie de la parabolicité fonctionne aussi pour ce type d'opérateurs : le résultat principal de [49] dit que

Théorème 1.4.4 *Soit q la forme quadratique associée à L. On a la dichotomie suivante :*

1. *Soit L a un trou spectral à poids, c'est-à-dire qu'il existe une fonction strictement positive χ telle que pour tout $u \in C_0^\infty(M)$,*

$$\int_M u^2\chi \leq q(u).$$

Dans ce cas, on dit que L est non-parabolique, ou sous-critique. De plus, L admet des fonctions de Green.

2. *Soit il existe une fonction ψ positive, à support compact, et une fonction strictement positive χ telles que pour tout $u \in C_0^\infty(M)$,*

$$\int_M u^2\chi \leq q(u) + \left(\int_M \psi u\right)^2.$$

Dans ce cas, on dit que L est parabolique, ou critique.

Par Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_M \psi u\right)^2 \leq \left(\int_M \psi\right)\left(\int_M \psi u^2\right) = C\int_M \psi u^2,$$

donc on peut supposer, au besoin en prenant $\tilde{V}$ plus grand, que L est non-parabolique. On est donc dans la situation où L a un trou spectral à poids : il existe une fonction strictement positive χ telle que pour tout $u \in C_0^\infty(M)$,

$$\int_M u^2\chi \leq q(u).$$

Ceci implique que la caractérisation de la non-parabolicité du Théorème 1.2.1 est valable pour L, même si W n'est pas positif. Cela nous permet de faire fonctionner les preuves de la section 1.3 pour L, et donc de prouver le Lemme suivant :

Lemme 1.4.9 *Pour tout potentiel R à support compact, dans L^p avec $\frac{n}{2} < p \leq \infty$, $L + R$ a un nombre fini (en comptant les multiplicités) de valeurs propres négatives.*

Puisque L et H diffèrent d'un potentiel à support compact $\tilde{V}$ dans L^∞, cela donne le résultat pour H.

$\square$

Chapitre 2

La transformée de Riesz

Cette partie sera consacrée à l'étude de la transformée de Riesz sur certaines variétés complètes non-compactes. Tout d'abord, en guise de motivation, nous présentons la théorie classique de Calderón-Zygmund, qui permet l'étude de la transformée de Riesz sur $\mathbb{R}^n$. Puis nous décrivons les généralisations qui en ont été faites sur les variétés Riemanniennes, et donnons un certains nombre d'exemples pour lesquels le comportement de la transformée de Riesz est connu. Ces exemples joueront par la suite un rôle important, à la fois comme sources d'inspiration, et comme tests pour la validité de nos résultats. Nous passons alors à la description de nos résultats, et enfin à leurs preuves.

2.1 Théorie de Calderón-Zygmund

Nous allons présenter la théorie de Calderón-Zygmund dans $\mathbb{R}^n$, ainsi que les généralisations qui en ont été faites sur les variétés. Nous donnerons les conséquences de cette théorie pour l'étude de la transformée de Riesz.

2.1.1 La théorie classique

Commençons par présenter la théorie classique dans $(\mathbb{R}^n, eucl)$. La présentation que nous en faisons est tirée de [47]. Notons $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions lisses à support compact, et $\mathcal{D}'$ l'espace des distributions. Soit $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ un opérateur continu. Par le Théorème des noyaux de Schwartz, il existe un noyau $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, tel que :

$$\langle Tf, g\rangle = \langle S, f \otimes g\rangle, \ \forall (f,g) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}.$$

Considérons $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \neq y\}$, et soit K la restriction de S à Ω.

Définition 2.1.1 *T est un **opérateur de Calderón-Zygmund** s'il existe un exposant $\gamma \in (0,1]$ tel que les conditions suivantes soient vérifiées :*

1. *K est localement intégrable sur Ω, et satisfait :*

$$|K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n}$$

2. *si $|x-x'| \leq |x-y|/2$,*

$$|K(x,y) - K(x',y)| \leq C|x-x'|^\gamma |x-y|^{-n-\gamma}$$

3. *si $|y-y'| \leq |x-y|/2$,*

$$|K(x,y) - K(x,y')| \leq C|y-y'|^\gamma |x-y|^{-n-\gamma}$$

4. T s'étend en un opérateur linéaire continu sur L^2.

Dans cette partie, on s'intéressera à l'opérateur $R_i := \frac{\partial}{\partial i}\Delta^{-1/2}$, appelé la **transformée de Riesz d'indice i**. Remarquons que $(R_1, \ldots, R_n) = d\Delta^{-1/2}$; $R := d\Delta^{-1/2}$ est appelé la **transformée de Riesz**. R étant une isométrie sur L^2 par la formule de Green, il est clair que chaque R_i vérifie 4. Pour vérifier les autres hypothèses, on a besoin de connaître le noyau K_i de R_i, K_i étant défini sur Ω.

Lemme 2.1.1

$$K_i(x, y) = c\frac{x_i - y_i}{|x - y|^{n+1}},$$

où c est une constante ne dépendant que de la dimension.

Preuve :

Il suffit de voir que le noyau de $\Delta^{-1/2}$ est un multiple de $\frac{1}{|x-y|^{n-1}}$. Pour ce faire, on part de la formule :

$$\Delta^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t\Delta}t^{-1/2}dt$$

Etant donné que $e^{-t\Delta}$ est l'opérateur de convolution par $\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{\frac{-|z|^2}{4t}}$, $\Delta^{-1/2}$ est l'opérateur de convolution par :

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{\frac{-|z|^2}{4t}}t^{-1/2}dt$$

Faisant le changement de variable $u = \frac{t}{|z|^2}$, on trouve que $\varphi(z) = c|z|^{-n+1}$.

□

La propriété 1 est alors évidente. On vérifie 2 et 3 avec $\gamma = 1$, ce qui est équivalent à vérifier que $\left|\frac{\partial K_i}{\partial x}(x, y)\right| + \left|\frac{\partial K_i}{\partial y}(x, y)\right| \leq C|x - y|^{-n-1}$. En résumé, on a montré :

Proposition 2.1.1 *R_i est un opérateur de Calderón-Zygmund.*

Le résultat fondamental concernant les opérateurs de Calderón-Zygmund est le fait qu'ils s'étendent en opérateurs bornés sur certains espaces L^p :

Théorème 2.1.1 *Soit T un opérateur de Calderón-Zygmund. Alors T a une extension continue $L^p \to L^p$, pour tout $1 < p < \infty$.*

Puisque dans cette thèse nous chercherons à étendre ce résultat à des espaces plus généraux que $(\mathbb{R}^n, eucl)$, il est instructif de donner la preuve de ce théorème : en effet, nous verrons qu'une partie de la démonstration reste valable, ou peut être adaptée, sur certaines variétés Riemanniennes.
Rappelons qu'on définit l'espace L^1 faible, noté L^1_w, comme étant l'ensemble des fonctions mesurables f telles que

$$||f||_w := \sup_{\lambda>0} \lambda|\{|f| > \lambda\}| < \infty$$

Le Théorème 2.1.1 va être conséquence du résultat suivant :

Théorème 2.1.2 *Soit T un opérateur de Calderón-Zygmund. Alors T s'étend en un opérateur borné $L^1 \to L^1_w$.*

Remarque 2.1.1 *En fait, l'hypothèse que nous utiliserons sur le noyau de T est seulement que $K \in L^1_{loc}$ et que :*

$$\int_{\{x:|x-y'|\geq 2|y-y'|\}} |K(x,y') - K(x,y)|dx \leq C,$$

qui est une conséquence de 3. Cette remarque s'avèrera importante par la suite, lorsqu'on voudra généraliser la théorie de Calderón-Zygmund au cas des variétés Riemanniennes.

Preuve :

La démonstration repose sur la décomposition de Calderón-Zygmund. Il existe plusieurs variantes de cette décomposition, certaines étant valables pour des sections de fibrés vectoriels comme nous le verrons plus tard.

Lemme 2.1.2 ***Décomposition de Calderón-Zygmund, sur*** $\mathbb{R}^n$ *Soit f une fonction $L^1 \cap L^2$, et λ un réel strictement positif. Alors f peut s'écrire $f = g + b$, avec $g \in L^1 \cap L^2$ et*

$$b = \sum_{j \in J} b_j,$$

chaque fonction b_j ayant support inclus dans un cube Q_j, tels que les Q_j soient des cubes d'intérieurs disjoints, de réunion notée Ω, et tels qu'on ait les propriétés suivantes :

1. $||g||_2 \leq C\lambda^{1/2}||f||_1^{1/2}$
2. $|\Omega| \leq C\lambda^{-1}||f||_1$
3. $\int_{Q_j} |b_j| \leq C\lambda|Q_j|$
4. $\int_{Q_j} b_j = 0$

Munis de ce lemme, nous pouvons achever la démonstration du Théorème 2.1.2. Soit $f \in L^1 \cap L^2$ et $\lambda > 0$. On écrit la décomposition de Calderón-Zygmund de f de seuil λ : $f = g + b$. On a

$$\{|Tf| > \lambda\} \subset \left\{|Tg| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{|Tb| > \frac{\lambda}{2}\right\} = E_1 \cup E_2,$$

donc il suffit de majorer chacun des deux termes $|E_1|$ et $|E_2|$. Pour le terme faisant intervenir g, on utilise le fait que T est borné sur L^2 et l'inégalité de Chebychev :

$$\frac{\lambda^2}{4}|E_1| \leq ||Tg||_2^2 \leq C\lambda||f||_1,$$

qui donne $|E_1| \leq \frac{C}{\lambda}||f||_1$. Soit $\Omega^\star = \bigsqcup_{j\in J} Q_j^\star$, où $Q_j^\star$ est le cube de même centre que Q_j et de rayon double. Pour $|E_2|$, étant donné que $|\Omega^\star| \leq C\lambda^{-1}||f||_1$, il suffit de majorer $|E_2 \setminus \Omega|$. Puisque $b = \sum_{j\in J} b_j$, la somme convergeant dans L^2, on a $Tb = \sum_{j\in J} Tb_j$. Pour $x \notin \Omega^\star$, on peut utiliser la représentation de T par son noyau, et utilisant que b_j a une moyenne nulle :

$$\begin{aligned} Tb_j(x) &= \int_{Q_j} K(x,y)b_j(y)dy \\ &= \int_{Q_j} (K(x,y) - K(x,y_j))b_j(y)dy, \end{aligned}$$

où y_j est le centre de Q_j. Par Chebychev, $|E_2 \setminus \Omega^\star| \leq \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega^\star} |Tb|$. Maintenant,

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega^\star} |Tb| \leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega^\star} \sum_{j\in J} \left(\int_{Q_j} |K(x,y) - K(x,y_j)||b_j(y)|dy \right) dx,$$

et en échangeant l'ordre d'intégration et en utilisant l'hypothèse $\int_{\{x:|x-y'|\geq 2|y-y'|\}}|K(x,y')-K(x,y)|dx \leq C$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega^\star}|Tb| \leq C\sum_{j\in J}\int_{Q_j}|b_j(y)|dy \leq ||f||_1,$$

ce qui achève la démonstration.

□

Expliquons comment en déduire le Théorème 2.1.1 : par le Théorème d'interpolation de Marcinkiewicz, T est borné $L^p \to L^p$ pour $1 < p \leq 2$. On considère ensuite le dual de T : $T^\star$ est aussi un opérateur de Calderón-Zygmund, car son noyau est donné par $K^\star(x,y) := K(y,x)$. Donc $T^\star$ est borné $L^p \to L^p$ pour $1 < p \leq 2$, et on en déduit par dualité que T est borné $L^p \to L^p$ pour $2 \leq p < \infty$.

□

2.1.2 Extensions aux variétés Riemanniennes et aux fibrés vectoriels

L'estimée L^1 faible Il y a eu un certains nombre de généralisation de la théorie de Calderón-Zygmund, motivées notamment par le fait qu'il est naturel d'étudier la transformée de Riesz $R = d\Delta^{-1/2}$ sur les variétés Riemanniennes complètes non-compactes. Il y a plusieurs obstacles à l'extension de la théorie classique. Ce qui reste vrai est que R est une isométrie sur L^2, cependant on ne dispose pas en général de formule explicite pour le noyau de R. Et imposer au noyau K de R des conditions semblables à celles sur $\mathbb{R}^n$, disons par exemple :

$$\left|\frac{\partial K}{\partial x}(x,y)\right| \leq \frac{C}{d(x,y)^{n+1}},$$

restreindrait drastiquement la classe des variétés Riemanniennes considérées, pour la raison suivante. Partant de la formule

$$\Delta^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t\Delta}t^{-1/2}dt,$$

on voit que le noyau de R est donné par :

$$K(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \nabla_x p_t(x,y)t^{-1/2}dt,$$

et donc estimer $\frac{\partial K}{\partial x}$ reviendrait à estimer $\nabla_x^2 p_t(x,y)$ ponctuellement. Mais il est déjà très difficile d'estimer ponctuellement la dérivée première $\nabla_x p_t(x,y)$, et en fait les seules variétés pour lesquelles on sait le faire sont les variétés à courbure de Ricci positives et certains groupes de Lie. Cependant, dans le cas particulier de la transformée de Riesz, on peut essayer de faire marcher la démonstration du Théorème 2.1.2, en utilisant la remarque 2.1.1 : en fait, l'hypothèse d'être un opérateur de Calderón-Zygmund est trop forte, et on peut espérer faire marcher la démonstration sous des hypothèses plus faibles. La première chose à faire est d'étendre la décomposition de Calderón-Zygmund. Pour cela, nous avons besoin de la définition :

Définition 2.1.2 *On dit que la* ***mesure est doublante*** *si*

$$V(x,2R) \leq C\,V(x,R),\ \forall x\in M,\ \forall R\geq 0 \tag{D}$$

L'hypothèse de mesure doublante est la bonne hypothèse pour avoir une décomposition de Calderón-Zygmund sur les variétés Riemanniennes :

Théorème 2.1.3 ***Décomposition de Calderón-Zygmund sur une variété Riemannienne***

Soit M une variété Riemannienne vérifiant l'hypothèse (D). *Alors pour toute fonction f dans $L^1 \cap L^2$, et λ réel strictement positif, f peut s'écrire $f = g + b$, avec $g \in L^1 \cap L^2$ et*

$$b = \sum_{j \in J} b_j,$$

chaque fonction b_j ayant support inclus dans une boule B_j, tels qu'on ait les propriétés suivantes :

1. $||g||_2 \leq C\lambda^{1/2}||f||_1^{1/2}$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} |B_i| \leq C\lambda^{-1}||f||_1$
3. $\int_{B_j} |b_j| \leq C\lambda|B_j|$
4. *Il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que tout point de M soit contenu dans au plus k boules distinctes B_j.*

(remarquons qu'on n'a plus besoin de faire l'hypothèse que les b_j sont de moyenne nulle pour montrer les résultats qui suivent).

Etant donné ceci, Coulhon et Duong ont eu l'idée dans [17] de modifier les mauvaises fonctions b_j de la décomposition de Calderón-Zygmund de f, en écrivant :

$$b_j = \Phi_{r_j}(b_j) + (1 - \Phi_{r_j})(b_j),$$

où Φ_{r_j} est un opérateur régularisant d'échelle r_j, le rayon de B_j, et de rajouter $\Phi_{r_j}(b_j)$ à la bonne fonction g (pour laquelle on utilise dans la démonstration du Théorème 2.1.2 le fait que R est borné sur L^2). Dans le cas de Coulhon-Duong, $\Phi_{r_j} = e^{-{r_j}^2\Delta}$. Pour contrôler les termes $e^{-{r_j}^2\Delta}b_j$, on fait une hypothèse sur le noyau de la chaleur.

Définition 2.1.3 *Le noyau de la chaleur satisfait une* ***estimée gaussienne supérieure*** *si*

$$p_t(x,y) \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} e^{-\frac{cd^2(x,y)}{t}}, \ \forall (x,y) \in M \times M, \ \forall t > 0 \tag{G}$$

Remarque 2.1.2 *Sous l'hypothèse* (D), (G) *est équivalente à l'estimée diagonale :*

$$p_t(x,x) \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})}, \ \forall x \in M, \ \forall t > 0 \tag{GD}$$

Sous les hypothèses que la mesure est doublante et que le noyau de la chaleur satisfait l'estimée gaussienne supérieure G, on montre que $\sum_{j \in J} ||e^{-{r_j}^2\Delta}b_j||_2 \leq C\lambda^{1/2}||f||_1^{1/2}$, ce qui permet d'estimer $R\left(\sum_{j \in J} e^{-{r_j}^2\Delta}b_j\right)$ de la même manière que g précédemment. Pour contrôler le reste (=la « mauvaise fonction »), vu que $\sum_{i=1}^{\infty} |B_i| \leq C\frac{||f||_1}{\lambda}$, il suffit de majorer la mesure de

$$\left\{ \left| \sum_{i=1}^{\infty} R\left[\left(1 - e^{-{r_i}^2\Delta}\right) b_i \right] \right| > \lambda \right\} \setminus \bigcup_j 2B_j.$$

Pour cela, par l'inégalité de Markov il suffit de majorer la norme L^1 de

$$\sum_{i=1}^{\infty} R\left[\left(1-e^{-r_i{}^2\Delta}\right)b_i\right]$$

sur $M \setminus \bigcup_j 2B_j$, et puisque que $\sum_{i=1}^{\infty}||b_j||_1 \leq C\frac{||f||_1}{\lambda}$, il suffit de montrer que

$$\int_{M\setminus 2B_j}\left|R\left[\left(1-e^{-r_j{}^2\Delta}\right)b_j\right]\right| \leq C||b_j||_1.$$

Ceci revient à montrer que le noyau $k_t(x,y)$ de $R(1-e^{-t\Delta})$ satisfait :

$$\int_{d(x,y)\geq\sqrt{t}}|k_t(x,y)|dx \leq C,\ \forall y\in M,\ \forall t>0. \tag{2.1}$$

Remarquons que cette condition est similaire à celle qui apparaît dans la preuve du Théorème 2.1.1, où l'on utilisait la condition $\int_{d(x,y')\geq 2d(x,y)}|K(x,y')-K(x,y)|dx \leq C$. Pour montrer (2.1), on utilise la formule :

$$\Delta^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t\Delta}t^{-1/2}dt,$$

et donc

$$k_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{\mathbf{1}_{s>t}}{\sqrt{s-t}}\right)\nabla_x p_s(x,y)ds.$$

L'inégalité (2.1) s'obtient alors comme conséquence de l'estimée suivante du gradient du noyau de la chaleur, valable sous les hypothèses (D) et (G) : il existe $\beta>0$ et $c>0$ telles que

$$\int_{d(x,y)\geq\sqrt{t}}|\nabla_x p_s(x,y)|dx \leq Ce^{-\beta t/s}s^{-1/2}e^{cs},\ \forall y\in M, \forall s,t>0.$$

En résumé, Coulhon et Duong ont montré :

Théorème 2.1.4 *[17]*
Soit (M,g) une variété Riemannienne complète non-compacte vérifiant les hypothèses (D) *et* (G) *(ou, de façon équivalente,* (D) *et* (GD)*). Alors la transformée de Riesz R est bornée $L^1\to L^1_w$, et donc est bornée $L^p\to L^p$ pour tout $1<p\leq 2$.*

Cependant, l'argument de dualité qui permet de conclure dans le cas de $\mathbb{R}^n$ ne se généralise pas du tout ! Utiliser la dualité nécessite en fait d'étendre le résultat de Coulhon-Duong au cas des formes différentielles. En effet, sur une variété Riemannienne, la transformée de Riesz $R=d\Delta^{-1/2}$ est un opérateur borné de $L^2(E_1)$ dans $L^2(E_2)$, où E_1 est le fibré trivial de fibre $\mathbb{R}$ sur M (dont les sections s'identifient aux fonctions à valeurs réelles sur M), et où E_2 est le fibré des 1-formes différentielles sur M, que nous noterons $\Lambda^1T^\star M$. $R^\star$, l'opérateur dual de R, est l'opérateur $\Delta^{-1/2}d^\star : L^2(E_2)\to L^2(E_1)$. De plus, on a la relation de commutation suivante :

$$\Delta^{-1/2}d^\star = d^\star\vec{\Delta}^{-1/2},$$

où $\vec{\Delta}=dd^\star+d^\star d$ est le Laplacien de Hodge-De Rham sur les 1-formes différentielles, et où $\vec{\Delta}^{-1/2}$ est défini au moyen de la formule :

$$\vec{\Delta}^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t\vec{\Delta}}t^{-1/2}dt,$$

car $\vec{\Delta}$, à la différence de Δ, peut avoir un noyau non trivial. On voit donc que $R^\star = d^\star \vec{\Delta}^{-1/2}$ est du même type que R, mais où le Laplacien sur les fonctions est remplacé par un Laplacien sur les formes différentielles. Motivé par ce fait, Sikora a généralisé au cas des fibrés Riemanniens l'idée de Coulhon-Duong d'utiliser une décomposition de Calderón-Zygmund modifiée. Si E est un fibré Riemannien sur M, et L est un opérateur borné agissant sur $L^2(E)$, l'espace des sections L^2 de E, on dit que e^{-tL} satisfait une **estimée Gaussienne** si on a :

$$||K_{exp(-tL)}(x,y)|| \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} e^{-\frac{cd^2(x,y)}{t}}, \ \forall (x,y) \in M \times M, \ \forall t > 0, \tag{2.2}$$

où $K_{exp(-tL)}$ désigne le noyau de e^{-tL}. Utilisant une décomposition de Calderón-Zygmund pour les sections de E, Sikora montre dans [57] le résultat suivant :

Théorème 2.1.5 *Soit* (M,g) *une variété Riemannienne satisfaisant* (D)*, et* E_1*,* E_2 *deux fibrés Riemanniens sur* M*. Soit* L *agissant sur* $L^2(E_1)$*, tel que* e^{-tL} *satisfasse l'estimée gaussienne* (2.2)*. Soit* $A : \mathcal{D}(A) \subset L^2(E_1) \to L^2(E_2)$ *un opérateur local, c'est-à-dire que pour tout* $f \in \mathcal{D}(A)$*,*

$$supp\ Af \subset supp\ f$$

Supposons que pour un $\alpha > 0$*,* $\mathcal{D}(L^{-\alpha}) \subset \mathcal{D}(A)$*, et que* $AL^{-\alpha}$ *soit borné* $L^2(E_1) \to L^2(E_2)$*. Alors l'opérateur* $AL^{-\alpha}$ *est borné* $L^1(E_1) \to L^1_w(E_2)$*, et donc aussi* $L^p(E_1) \to L^p(E_2)$ *pour tout* $1 < p \leq 2$*.*

Distinguons l'hypothèse d'estimée Gaussienne pour le Laplacien de Hodge sur les 1-formes différentielles :

$$||\vec{p_t}(x,y)|| \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} e^{-\frac{cd^2(x,y)}{t}}, \ \forall (x,y) \in M \times M, \ \forall t > 0, \tag{GF}$$

où $\vec{p_t}$ est le noyau de $e^{-t\vec{\Delta}}$. L'argument de dualité pour la transformée de Riesz s'exprime alors par le Corollaire suivant :

Corollaire 2.1.1 *Soit* M *une variété Riemannienne vérifiant* (D)*, et sur laquelle* (GF) *est valable. Alors la transformée de Riesz est bornée* $L^p \to L^p$ *pour tout* $2 \leq p < \infty$*.*

La principale différence entre ce résultat et celui de Coulhon-Duong est que l'hypothèse faite, à savoir (GF), est beaucoup plus forte que (G). En fait, (G) est une hypothèse relativement faible, alors que les seules variétés ou l'on sait que (GF) est valable sont les variétés à courbure de Ricci positive ! Nous continuerons cette discussion sur le noyau de la chaleur sur les formes dans la section 2.3.

Les estimées L^p pour $p > 2$ Généralisant des techniques liées à la théorie de Calderón-Zygmund classique, Auscher, Coulhon, Duong et Hofmann ont obtenu dans [5] une condition nécessaire et suffisante (sous certaines hypothèses) à ce que la transformée de Riesz soit bornée sur L^p, pour un $p > 2$. Rappelons tout d'abord :

Définition 2.1.4 *On dit qu'on a une estimée gaussienne supérieure et inférieure –ou* ***estimée de Li-Yau****– s'il existe des constantes* C_i *et* c_i*,* $i = 1, 2$*, telles que*

$$\frac{C_1}{V(x,\sqrt{t})} e^{-\frac{c_1 d^2(x,y)}{t}} \leq p_t(x,y) \leq \frac{C_2}{V(x,\sqrt{t})} e^{-\frac{c_2 d^2(x,y)}{t}}, \ \forall (x,y) \in M \times M, \ \forall t > 0 \tag{L-Y}$$

Définition 2.1.5 *On dit qu'on a une* ***inégalité de Poincaré*** L^2 *à l'échelle si pour toute boule* B *de rayon* r,

$$\int_B |f - f_B|^2 \leq Cr^2 \int_B |\nabla f|^2, \forall f \in C^\infty(B) \tag{P}$$

Remarque 2.1.3 *L'estimée de Li-Yau* (L-Y) *est équivalente à la conjonction de* (D) *et de* (P) *(c'est un résultat de Saloff-Coste, voir [56] pour des références).*

Le résultat de Auscher-Coulhon-Duong-Hofmann [5] est le suivant :

Théorème 2.1.6 *Soit* (M, g) *une variété complète non-compacte vérifiant* (L-Y). *Soit* $p_0 \in (2, \infty]$. *Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout* $p \in [2, p_0)$, *la transformée de Riesz* R *est bornée sur* L^p.
2. *Pour tout* $p \in [2, p_0)$,

$$||\nabla_x p_t(., y)||_p \leq \frac{C}{\sqrt{t}V(y, \sqrt{t})^{1-\frac{1}{p}}}, \forall y \in M, \forall t > 0 \tag{G_p}$$

De plus, si l'estimation ponctuelle suivante du gradient du noyau de la chaleur est valable :

$$|\nabla_x p_t(x, y)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}V(y, \sqrt{t})}, \forall (x, y) \in M \times M, \forall t > 0, \tag{G_∞}$$

et si M *vérifie* (D) *et* (G), *alors l'estimée de Li-Yau* (L-Y) *est valable, et la transformée de Riesz est bornée sur* L^p *pour tout* $1 < p < \infty$.

Remarque 2.1.4 *Le fait que la transformée de Riesz bornée sur* L^p *implique l'estimée* L^p *du gradient* (G_p), *n'utilise pas l'estimée gaussienne inférieure dans Li-Yau ; cela nécessite seulement les hypothèses* (D), (G) *et l'analyticité sur* L^p *du semi-groupe de la chaleur.*

L'argument de Auscher-Coulhon-Duong-Hofmann est différent de l'argument utilisé pour montrer le Théorème 2.1.1 : au lieu d'utiliser une décomposition de Calderón-Zygmund, on utilise un Lemme souvent appelé « inégalité du bon λ », qui permet d'obtenir des estimées L^p. Rappelons la définition de l'**opérateur maximal de Hardy-Littlewood** :

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f|.$$

Le résultat d'analyse harmonique montré dans [5] est le suivant (la conclusion est un peu plus faible en fait, mais dans le cas qu'on considère elle sera vraie) :

Théorème 2.1.7 *Soit* (M, d, μ) *espace métrique mesuré de volume infini vérifiant* (D), *et* $T : L^2 \to L^2$ *borné. Soit* $p_0 \in (2, \infty]$, *et* A_r, $r > 0$ *une famille d'opérateurs bornés* $L^2 \to L^2$. *Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées :*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |T(I - A_{r(B)})f|^2 d\mu\right)^{1/2} \leq C(\mathcal{M}(|f|^2))^{1/2}(x) \tag{2.3}$$

et

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |TA_{r(B)}f|^{p_0} d\mu\right)^{1/p_0} \leq C(\mathcal{M}(|Tf|^2))^{1/2}(x) \tag{2.4}$$

pour toute fonction $f \in L^2$, *toute boule* B *de rayon* $r(B)$ *et tout* $x \in B$.
Alors pour tout $2 \leq p < p_0$, T *est borné* $L^p \to L^p$.

Les opérateurs A_r jouent le même rôle d'approximation de l'identité que $e^{-r^2\Delta}$ dans la preuve du théorème de Coulhon-Duong : l'hypothèse (2.4) exprime le fait qu'appliquer A_r améliore l'estimée L^2 qu'on a sur Tf, en une estimée L^{p_0}, et l'estimée (2.3) exprime le fait qu'on a un certain contrôle sur le reste $T(I - A_r)f$. La preuve de ce résultat utilise d'une part une inégalité de type « bon-λ », et d'autre part le fait que celle-ci implique des estimées L^p. Notons $\mathcal{M}_A$ l'opérateur maximal :

$$\mathcal{M}_A(f)(x) = \left(\sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |T(I - A_{r(B)})f|^2\right)^{1/2}.$$

On a alors :

Lemme 2.1.3 ***Inégalité du bon-λ*** *Sous l'hypothèse* (2.4)*, il existe $K_0 > 1$ et $C > 0$ tels que pour tout $K > K_0$, tout $\gamma > 0$, tout $\lambda > 0$,toute boule B_0 et tout $f \in L^2$ telle qu'il existe $x_0 \in B_0$ tel que $(\mathcal{M}(|Tf|^2))^{1/2}(x_0) \leq \lambda$, on ait*

$$\left|\left\{x \in B_0 : (\mathcal{M}(|Tf|^2))^{1/2} > K\lambda,\, \mathcal{M}_A(f)(x) \leq \gamma\lambda\right\}\right| \leq C(\gamma^2 + K^{-p_0})|B_0| \qquad (2.5)$$

Comme indiqué précédemment, l'inégalité (2.5) implique des majorations des normes L^p :

Lemme 2.1.4 *Sous l'hypothèse* (2.4)*, pour tout $2 < p < p_0$, il existe une constante C_p telle que pour toute $f \in L^2$:*

$$|| \left(\mathcal{M}(|Tf|^2)\right)^{1/2} ||_p \leq C_p ||\mathcal{M}_A(f)||_p \qquad (2.6)$$

La conclusion du Théorème 2.1.7 est alors immédiate. En effet, on a en utilisant (2.6) :

$$||Tf||_p \leq || \left(\mathcal{M}(|Tf|^2)\right)^{1/2} ||_p \leq C_p ||\mathcal{M}_A(f)||_p,$$

et d'après l'hypothèse (2.3) et le fait que l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood est borné $L^{p/2} \to L^{p/2}$, on a

$$||\mathcal{M}_A(f)||_p \leq C||f||_p,$$

ce qui achève la démonstration.

□

Pour obtenir le Théorème 2.1.6, il reste à voir comment, dans le cas particulier où T est la transformée de Riesz, on peut construire des approximations de l'identité A_r de telle sorte que les conditions (2.3) et (2.4) soient satisfaites. On pose $A_r = I - (I - e^{-r^2\Delta})^n$ pour un n assez grand, et la vérification des conditions (2.3) et (2.4) s'obtient à l'aide des **estimées de Gaffney-Davies** L^p, valables pour $2 \leq p < p_0$ et obtenues en interpolant les estimées de Gaffney-Davies L^2 avec l'inégalité :

$$||\nabla e^{-t\Delta}||_{p_0,p_0} \leq \frac{C}{\sqrt{t}},$$

vérifiée par hypothèse. On a alors pour tous ensembles fermés E et F et pour toute fonction $f \in L^p$ à support dans E,

$$||\nabla e^{-t\Delta} f||_{L^p(F)} \leq C e^{-\alpha \frac{d^2(E,F)}{t}} ||f||_{L^p(E)}, \qquad (2.7)$$

et ceci permet, par des arguments similaires à ceux développés dans la preuve du Théorème de Coulhon-Duong, de montrer (2.3) et (2.4).

2.2 Exemples et contre-exemples

Dans cette partie, nous passons en revue un certain nombre d'exemples de variétés Riemanniennes pour lesquelles le comportement de la transformée de Riesz est connu. Le but recherché n'est pas l'exhaustivité, mais plutôt de se forger une intuition, à la lueur des exemples présentés, du comportement de la transformée de Riesz dans une classe de variétés qu'on pourrait qualifier de « presque euclidiennes » : les variétés présentées peuvent être à chaque fois considérées comme des généralisations –dans des sens cependant différents– de l'espace euclidien. On connaît en fait assez peu d'exemples de variétés pour lesquelles le comportement de la transformée de Riesz soit complètement décrit ; les groupes de Lie sont une exception notable, que nous ne présentons pas à dessein, puisque l'étude de la transformée de Riesz repose dans ce cas sur des arguments spécifiques. On pourra se reporter à [2]. Mentionnons aussi le cas des revêtements de variétés compactes, qui ont été étudiés dans certains cas par Dungey, voir [27]. Pour résumer, on peut dire que la théorie est bien développée dans le cadre des groupes de Lie ou des groupes de revêtement à croissance polynomiale.

2.2.1 Les variétés à courbure de Ricci positive

Bakry a montré dans [7], avec des techniques probabilistes, le très joli résultat suivant :

Théorème 2.2.1 *Soit M une variété Riemannienne. Si la courbure de Ricci est positive, alors la transformée de Riesz est bornée sur L^p pour tout $1 < p < \infty$. Si la courbure de Ricci vérifie seulement :*

$$Ric \geq -k^2,$$

alors il existe une constante C ne dépendant que de k et de p telle que :

$$||\nabla f|| \leq C\left(||\Delta^{1/2} f||_p + ||f||_p\right), \forall f \in C_0^\infty.$$

Utilisant le fait que si $\lambda_1(M)$, le bas du spectre du Laplacien sur M, est strictement positif, alors :

$$||f||_p \leq C||\Delta^{1/2} f||_p, \forall f \in C_0^\infty,$$

on obtient le Corollaire suivant :

Corollaire 2.2.1 *Soit M une variété Riemannienne avec courbure de Ricci minorée et bas du spectre du Laplacien strictement positif. Alors la transformée de Riesz est bornée sur L^p pour tout $1 < p < \infty$. Ainsi, sur $M = \mathbb{H}^n$, l'espace hyperbolique de dimension n, la transformée de Riesz est bornée sur L^p pour tout $1 < p < \infty$.*

En fait, les variétés à courbure de Ricci positive sont exactement les variétés pour lesquelles on a la domination :

$$|e^{-t\vec{\Delta}}\omega| \leq e^{-t\Delta}|\omega|, \forall t > 0.$$

Et l'article de Bakry étend grâce à cette domination la théorie de Littlewood-Paley au cas du Laplacien de Hodge sur les 1-formes différentielles.

2.2.2 La somme connexe de deux espaces euclidiens

On notera $\mathbb{R}^n \# \mathbb{R}^n$ une variété obtenue comme somme connexe de deux espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$. Contrairement au cas de $\mathbb{R}^n$, on a le résultat suivant pour la transformée de Riesz sur $\mathbb{R}^n \# \mathbb{R}^n$:

Théorème 2.2.2 *[13] Sur $\mathbb{R}^n \# \mathbb{R}^n$, la transformée de Riesz est bornée sur L^p si et seulement si $p \in (1, n)$.*

Il y a plusieurs démonstrations de ce résultat : le fait que la transformée de Riesz soit bornée pour $1 < p < n$ repose sur une construction de paramétrice, tandis que le fait qu'elle ne soit pas bornée pour $p \geq n$ repose sur un argument faisant intervenir le noyau de la chaleur ou l'étude de la cohomologie L^p réduite de $\mathbb{R}^n \# \mathbb{R}^n$.

Construction d'une paramétrice Il y a deux constructions différentes qui ont été faites. La première, tirée de Carron-Coulhon-Hassell [13], repose sur la formule suivante :

$$\Delta^{-1/2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (\Delta + k^2)^{-1} dk \tag{2.8}$$

On construit alors une paramétrice pour $(\Delta + k^2)^{-1}$ (en fait, il suffit même d'analyser le comportement de la résolvante $(\Delta + k^2)^{-1}$ lorsque $k \to 0$). Soit K un compact de $M = \mathbb{R}^n \# \mathbb{R}^n$ tel que $M \setminus K$ soit isométrique à l'union disjointe de $\mathbb{R}^n \setminus B_1$ et de $\mathbb{R}^n \setminus B_2$, où B_1 et B_2 sont des boules euclidiennes. On suppose pour simplifier que $B_1 = B_2 = B$, et on note $M = (\mathbb{R}^n \setminus B)_- \bigsqcup (\mathbb{R}^n \setminus B)_+$. Soit $\varphi_\pm$ une fonction C^∞ sur M valant 1 sur $(\mathbb{R}^n \setminus 2B)_\pm$ et 0 sur $B_\pm$. Soit $\Phi(x,y) = \varphi_-(x)\varphi_-(y) + \varphi_+(x)\varphi_+(y)$ (non nulle seulement dans le cas où x et y sont dans le même bout). Si $G(k)$ désigne le noyau de $(\Delta + k^2)^{-1}$ sur $\mathbb{R}^n$, on considère la paramétrice

$$\tilde{G}(k) = G_1(k) + G_2(k) + G_3(k),$$

où les 3 termes sont les suivants : $G_1(k)(x,y) = G \# G(k)(x,y)\Phi(x,y)$ est nul sauf si x et y sont dans le même bout $\mathbb{R}^n \setminus B$, et dans ce cas $G_1(k)(x,y)$ est égal au noyau de la résolvante $(\Delta + k^2)^{-1}$ sur $\mathbb{R}^n$ (contenant $\mathbb{R}^n \setminus B$), appliqué en (x,y). $G_2(k) = G_{int}(k)(x,y)(1 - \Phi(x,y))$, où $G_{int}(k)$ est une paramétrice de $(\Delta + k^2)^{-1}$ sur un compact suffisamment grand de M, qu'on suppose de support près de la diagonale $\{x = y\}$. $G_3(k)(x,y)$ est non nul lorsque y est à l'extérieur de K, et vaut $G(k)(0,y)(u_+(x)\varphi_+(y) + u_-(x)\varphi_-(y))$, $u_\pm$ étant une fonction telle que $h_\pm := \varphi_\pm + u_\pm$ soit une fonction harmonique, tendant vers 1 en $\pm\infty$ et vers 0 en $\mp\infty$. G_3 est un terme correctif, tel que lorsque x reste dans un compact et y tend vers l'infini, par exemple vers $+\infty$,

$$G_1(x,y) + G_3(x,y) \approx G(0,y)h_+(x).$$

Par contre, lorsque x et y tendent tous les deux vers l'infini, s'ils sont dans le même bout c'est le terme $G_1(k)(x,y)$ qui l'emporte dans $G_1 + G_3$. Lorsque x et y vont à l'infini dans des bouts différents, il reste essentiellement le terme G_2 dans la paramétrice $\tilde{G}$.

Remarque 2.2.1 *Si l'on veut construire sur le modèle précédent une paramétrice pour $(\Delta + k^2)^{-1}$ sur une variété isométrique en-dehors d'un compact K à $\mathbb{R}^n \setminus B$, on pose :*

$$\tilde{G}(k) = G_1(k) + G_2(k) + G_3(k),$$

où G_1 et G_2 sont définies de façon semblable, et où

$$G_3(k) = G(k)(0,y)\left((1-\varphi)(x)\varphi(y)\right),$$

φ étant une fonction de coupure valant 1 *sur* $\mathbb{R}^n \backslash 2B$ *et* 0 *sur* B. *L'étude de cette paramétrice faite dans [13] permet de montrer que la transformée de Riesz est bornée sur* L^p *pour* $1 < p < \infty$. *En ce sens, la construction de la paramétrice est bonne pour tout* $1 < p < \infty$.

Remarquons toutefois que les estimations faites dans [13] pour montrer que la transformée de Riesz est bornée sur L^p, utilisent les techniques du *b-calcul*, qui sont spécifiques aux variétés ayant une « asymptotique à l'infini » particulière, par exemple les variétés asymptotiquement coniques, mais ne s'appliquent pas à des variétés plus générales. Signalons enfin que par des arguments similaires, Guillarmou et Hassell ont étendu le résultat précédent aux variétés asymptotiquement coniques (voir le paragraphe suivant, plus précisément le Théorème 2.2.6).

Nous présentons maintenant une autre construction de paramétrice, qui a été utilisée par Carron dans [12] pour montrer le résutat suivant :

Théorème 2.2.3 *Soit* M_0 *une variété Riemanniene avec courbure de Ricci minorée et telle que pour un* $\nu > 3$ *l'inégalité de Sobolev soit vérifiée :*

$$||\varphi||_{L^{\frac{2\nu}{\nu-2}}} \leq C||d\varphi||_2, \; \forall \varphi \in C_0^\infty(M_0)$$

Soit M *isométrique à une somme connexe de variétés* M_0, *et supposons que pour un* $p \in (\frac{\nu}{\nu-1}, \nu)$, *la transformée de Riesz sur* M_0 *soit bornée sur* L^p. *Alors la transformée de Riesz sur* M *est bornée sur* L^p.

La technique utilisée pour montrer ce résultat est plus générale que celle de Carron-Coulhon-Hassell, et plus simple car elle n'utilise pas le b-calcul, mais en contrepartie le résultat obtenu est moins fort : dans le cas d'une variété à bouts euclidiens, on perd la conclusion pour $p \geq \nu$ lorsqu'il n'y a qu'un seul bout, et on a la restriction $\nu > 3$, ce qui est gênant. La preuve part de la formule :

$$\Delta^{-1/2} = \int_0^\infty e^{-t\sqrt{\Delta}} dt.$$

On construit ensuite une paramétrice pour $e^{-t\sqrt{\Delta}}$. Introduisons quelques notations qui seront utiles dans la suite du texte.
Notations : Pour deux ensembles U et V, on notera

$$U \subset\subset V$$

lorsque l'adhérence de U est contenue dans l'intérieur de V. Pour tout ensemble F et tout $\delta > 0$, on notera F_δ l'ensemble des points à distance de F supérieure ou égale à δ.
Soient $K_1 \subset\subset K_2$ des compacts de M tels que $M \setminus K_1$ soit isométrique à l'extérieur d'un compact de M_0 (il suffit de le faire pour une copie de M_0, car on ne suppose pas M_0 connexe). Soit (ρ_0, ρ_1) une partition de l'unité telle que $\mathrm{supp}(\rho_0) \subset K_2$, $\mathrm{supp}(\rho_1) \subset M \backslash K_1$, et (φ_0, φ_1) telles que $\varphi_i \rho_i = \rho_i$, $\mathrm{supp}(\varphi_0) \subset K_2$, $\mathrm{supp}(\varphi_1) \subset M \backslash K_1$. Alors on prend comme paramétrice de $e^{-t\sqrt{\Delta}}$:

$$\varphi_0 e^{-t\sqrt{\Delta_0}} \rho_0 + \varphi_1 e^{-t\sqrt{\Delta_1}} \rho_1,$$

où Δ_0 est le Laplacien avec conditions de Dirichlet sur K_2, et Δ_1 est le Laplacien sur M_0 (isométrique à $M \setminus K_1$ en-dehors d'un compact). On intègre de 0 a ∞ ces deux termes pour approcher $\Delta^{-1/2}$ par une somme de deux termes :

$$L_0 + L_1 := \int_0^\infty \varphi_0 e^{-t\sqrt{\Delta_0}} \rho_0 dt + \int_0^\infty \varphi_1 e^{-t\sqrt{\Delta_1}} \rho_1 dt = \varphi_0 \Delta_0^{-1/2} \rho_0 + \varphi_1 \Delta_1^{-1/2}.$$

L_0 est l'analogue du terme G_2 de Carron-Coulhon-Hassell, tandis que L_1 est l'analogue de G_1, et on n'a plus le terme correctif G_3. Une explication possible est la suivante : on a vu que lorsque x et y tendent vers l'infini tous les deux, le terme G_3 est négligeable devant les deux autres, $G_3(x,y)$ n'a d'effet significatif que lorsque x reste dans un compact et y tend vers l'infini, auquel cas la différence entre la paramétrice de Carron et celle de Carron-Coulhon-Hassell pour la transformée de Riesz $d\Delta^{-1/2}$ est essentiellement le terme $\Delta^{-1/2}(0,y)(dh_+(x)\varphi_+(y)+dh_-(x)\varphi_-(y))$. On peut, sans changer essentiellement l'argument de Carron-Coulhon-Hassell, remplacer $G_3(x,y)$ par $m(k,y)(u_+(x)\varphi_+(y)+u_-(x)\varphi_-(y))$ où $m(k,y)$ est la moyenne sur B de $(\Delta+k^2)^{-1}(z,y)$, et le noyau précédent devient $m(y)(dh_+(x)\varphi_+(y)+dh_-(x)\varphi_-(y)) = L_+(x,y)+L_-(x,y)$, où $m(y)$ est la moyenne de $\Delta^{-1/2}(z,y)$ sur B. Ce noyau correspond à un opérateur borné sur L^p lorsque $p<n$. En effet, il suffit de traiter chacun des 2 termes de la somme, et si $f \in L^p$ pour $p<n$ est à support dans $(\mathbb{R}^n \setminus B)_+$ par exemple,

$$L_+f(x) = \left(\int m(y)f(y)dy\right) dh_+(x) = \left(\frac{1}{|B|}\int_B \Delta^{-1/2}f\right) dh_+(x).$$

Maintenant, $dh \in L^p$ pour tout $2 \le p \le \infty$, et l'inégalité de Sobolev implique que $\Delta^{-1/2} : L^p \to L^1_{loc}$ pour tout $p<n$, d'où la conclusion.

Le noyau de la chaleur et la cohomologie L^p de $\mathbb{R}^n\#\mathbb{R}^n$ Nous allons maintenant expliquer pourquoi la transformée de Riesz sur $\mathbb{R}^n\#\mathbb{R}^n$ n'est pas bornée sur L^p pour $p \ge n$, et ce de deux manières différentes. On procède par l'absurde. La première méthode a été développée par Coulhon-Duong [17], et utilise le noyau de la chaleur ; cependant, elle ne donne de contradiction que pour $p>n$. La deuxième méthode, tirée de [13], utilise la cohomologie L^p et marche dans le cas $n \ge 3$.
La première méthode repose sur l'inégalité suivante, dite **inégalité de Morrey L^p**, où $p>n$:

$$|f(x)-f(y)| \le Cd(x,y)^{1-\frac{n}{p}}||\nabla f||_p, \forall f \in C_0^\infty(M) \qquad (M_p)$$

Il est classique que (M_p) est valable sur $\mathbb{R}^n$. Mais on a aussi :

Lemme 2.2.1 *$\mathbb{R}^n\#\mathbb{R}^n$ vérifie (M_p).*

Preuve :

Cela vient du fait que $\mathbb{R}^n$ vérifie un peu mieux que (M_p) ; en fait, sur $\mathbb{R}^n$ on a une inégalité de Morrey localisée :

$$|f(x)-f(y)| \le Cd(x,y)^{1-\frac{n}{p}}||\nabla f||_{L^p(\Omega)}, \forall f \in C^\infty(M), \qquad (2.9)$$

pour tout ouvert Ω convexe vérifiant : $x,y \in \Omega$, $C_1r^n \le |\Omega| \le C_2r^n$, $diam(\Omega) \le C_3r$ avec $r=d(x,y)$ (C dépend alors de C_1, C_2 et C_3). Voir [56] p.23 pour une démonstration. De plus, (2.9) reste vrai pour un ouvert convexe Ω de $\mathbb{R}^n$, muni d'une métrique quasi-isométrique à la métrique euclidienne (et la constante C de (2.9) dépend alors aussi des constantes de quasi-isométrie). L'intérêt de la version localisée de l'inégalité de Morrey est qu'elle se recolle, comme on va le voir dans le cas de $M=\mathbb{R}^n\#\mathbb{R}^n$. Soit K un compact tel que $M\setminus K$ soit isométrique à $\mathbb{R}^n\setminus B \sqcup \mathbb{R}^n \setminus B$ pour une certaine boule B. Soit $f \in C_0^\infty(M)$, et soient $x,y \in M$. Si x et y sont dans le même bout $\mathbb{R}^n \setminus B$, alors l'inégalité de Morrey localisée (2.9) appliquée à un ouvert convexe Ω inclus dans $\mathbb{R}^n \setminus B$ contenant x et y et vérifiant $C_1r^n \le |\Omega| \le C_2r^n$, $diam(\Omega) \le C_3r$ avec $r=d(x,y)$ donne :

$$|f(x)-f(y)| \le Cd(x,y)^{1-\frac{n}{p}}||\nabla f||_{L^p(\Omega)}.$$

Lorsque x et y sont dans K, la même inégalité provient de la remarque selon laquelle l'inégalité de Morrey localisée est valable sur un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, muni d'une métrique quasi-isométrique à la métrique euclidienne : en effet, on recouvre K d'un nombre fini N de tels ouverts, et dans chaque ouvert on choisi un point z_i. Alors

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(z_1)|+\cdots+|f(z_k)-f(y)| \leq C\left(d(x,z_1)^{1-\frac{n}{p}}+\cdots+d(z_k,y)^{1-\frac{n}{p}}\right)||\nabla f||_p,$$

où $(x,z_1,\cdots,z_k,y)$ est une chaîne de x à y telle que pour tout i,

$$d(z_{i-1},z_i) \leq d(x,y),$$

avec par convention $z_0 = x$ et $z_{k+1} = y$. Puisque le nombre de points z_i est borné par N, indépendamment de x et de y, on obtient

$$|f(x)-f(y)| \leq Cd(x,y)^{1-\frac{n}{p}}||\nabla f||_p.$$

Il reste à traiter le cas où x et y sont dans des bouts $\mathbb{R}^n \setminus B$ différents. Pour cela, on fixe une fois pour toutes z dans le même bout que x, et w dans le même bout que y. On a :

$$|f(x)-f(z)| \leq Cd(x,z)^{1-\frac{n}{p}}||\nabla f||_p,$$

et

$$|f(w)-f(y)| \leq Cd(w,y)^{1-\frac{n}{p}}||\nabla f||_p,$$

par Morrey localisé dans chaque bout. De plus, on fixe une fois pour toutes un compact $\tilde{K}$ contenant z et w, et en le recouvrant par des boules quasi-euclidiennes comme on a fait pour K et en utilisant Morrey localisé sur chacune de ces boules, on montre que :

$$|f(z)-f(w)| \leq Cd(z,w)^{1-\frac{n}{p}}||\nabla f||_p.$$

Puisque pour tous x et y dans $M \setminus K$ et dans des bouts différents,

$$d(x,y) \geq C\left(d(x,z)+d(z,w)+d(w,y)\right),$$

on obtient par concavité de la fonction $f(x) = x^{1-\frac{n}{p}}$,

$$|f(x)-f(y)| \leq Cd(x,y)^{1-\frac{n}{p}}||\nabla f||_p.$$

□

Supposons maintenant que la transformée de Riesz sur $M := \mathbb{R}^n \# \mathbb{R}^n$ soit bornée sur L^p pour un $p > n$. La clef est d'appliquer l'inégalité de Morrey (M_p) au noyau de la chaleur, et plus précisément à $f = p_t(.,z)$ où $z \in M$ est fixé. On obtient :

$$|p_t(x,z)-p_t(y,z)| \leq Cd(x,y)^{1-\frac{n}{p}}||\nabla p_t(.,z)||_p.$$

En général, on a déjà dit qu'il était difficile d'obtenir des estimées du gradient du noyau de la chaleur, cependant l'hypothèse que la transformée de Riesz soit bornée implique (c.f. Remarque 2.1.4) que

$$||\nabla p_t(.,z)||_p \leq \frac{C}{\sqrt{t}V(z,\sqrt{t})^{1-\frac{1}{p}}} \leq Ct^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{p}\right)-\frac{n}{2}},$$

et on obtient alors

$$|p_t(x,z)-p_t(y,z)| \leq Cd(x,y)^{1-\frac{n}{p}}t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{p}\right)-\frac{n}{2}}.$$

Le fait que M soit stochastiquement complète et que la croissance du volume sur M soit euclidienne impliquent que $p_t(z,z) \geq Ct^{-n/2}$, uniformément par rapport à t et à z (c.f. [56] p.101), et donc

$$|p_t(x,z) - p_t(y,z)| \leq C \left(\frac{d(x,y)}{\sqrt{t}} \right)^{1-\frac{n}{p}} \frac{1}{t^{n/2}}.$$

De là, on tire

$$p_t(y,z) \geq Ct^{-n/2}$$

dès que $d(y,z) \leq a\sqrt{t}$ pour $a > 0$ assez petit. Or M vérifie l'inégalité de Sobolev de dimension n, et donc

$$p_t(y,z) \leq \frac{C}{t^{n/2}} e^{-c\frac{d^2(y,z)}{t}}, \; \forall t > 0, \; \forall (y,z) \in M^2.$$

Un argument itératif ([15]) entraîne alors qu'on a la minoration gaussienne :

$$p_t(y,z) \geq \frac{C}{t^{n/2}} e^{-c\frac{d^2(y,z)}{t}}, \; \forall t > 0, \; \forall (y,z) \in M^2.$$

On a donc sur M les estimées de Li-Yau :

$$\frac{C_1}{t^{n/2}} e^{-c_1\frac{d^2(y,z)}{t}} \leq p_t(y,z) \leq \frac{C_2}{t^{n/2}} e^{-c_2\frac{d^2(y,z)}{t}}, \; \forall t > 0, \; \forall (y,z) \in M^2. \tag{2.10}$$

Cela voudrait dire que le noyau de la chaleur a le même comportement que sur $\mathbb{R}^n$. Cependant, lorsque x et y tendent vers l'infini dans deux bouts différents avec vitesse $d(x,y) \simeq \sqrt{t}$, $p_t(x,y)$ tend vers 0 plus vite que $t^{-n/2}$, qui serait l'asymptotique donnée par l'estimée de Li-Yau (2.10). En effet, $p_t(x,y)$ s'interprète comme la probabilité qu'une trajectoire brownienne partant de x, atteigne y en temps t. Heuristiquement, une trajectoire brownienne partant de x et allant en y doit nécessairement passer par le compact K. Or la probabilité d'aller de x à K en temps s est de l'ordre de $s^{-n/2}$, de même que la probabilité d'aller de K à y en temps $t-s$ est de l'ordre de $(t-s)^{-n/2}$. En intégrant sur les temps s auquel la trajectoire atteint K, Grigor'yan et Saloff-Coste ont montré dans [37] que sur M, $p_t(x,y) \simeq \frac{1}{t^{n-1}}$ si $n > 2$, et $\frac{1}{t \log t}$ si $n = 2$, ce qui contredit l'estimée de Li-Yau (2.10).

□

La deuxième preuve fait intervenir la cohomologie L^p réduite. Commençons d'abord par donner les définitions.

Définition 2.2.1 *Pour $p \geq 1$, le* ***premier espace de cohomologie*** L^p ***réduite*** $H^1_p(M)$ *est le quotient de $\{\alpha \in L^p(\Lambda^1 T^\star M),\, d\alpha = 0\}$, par la clôture dans L^p de l'espace de formes exactes $dC_0^\infty(M)$.*

On a, sur toute variété Riemannienne complète, la décomposition de Hodge L^2 :

$$L^2(\Lambda^1 T^\star M) = \mathcal{H}^1(M) \oplus_\perp \overline{dC_0^\infty(M)}^{L^2} \oplus_\perp \overline{d^\star C_0^\infty(\Lambda^2 T^\star M)}^{L^2},$$

où $\mathcal{H}^1(M) = \{\alpha \in L^2, \vec{\Delta}\alpha = 0\}$ est l'espace des $1-$formes harmoniques L^2. L'espace $H^1_2(M)$ admet une interprétation très simple, conséquence de la décomposition de Hodge :

$$H^1_2(M) \simeq \mathcal{H}^1(M).$$

Par contre, en général $H^1_p(M)$ n'a pas d'interprétation en terme de formes harmoniques. Cependant, lorsque la transformée de Riesz est bornée sur L^p, on va voir que $H^1_p(M)$

peut s'interpréter comme un espace de formes harmoniques L^p. Le lien entre $H_p^1(M)$ et la transformée de Riesz R vient de ce que le projecteur de Hodge L^2 sur l'espace des formes exactes $\overline{dC_0^\infty(M)}^{L^2}$ est donné par :

$$P = d\Delta^{-1}d^\star = RR^\star,$$

donc si R est bornée sur L^p et sur $L^{p'}$ (p' étant l'exposant dual de p), P est borné sur L^p. Partant de là, Carron-Coulhon-Hassell montrent dans [13] :

Lemme 2.2.2 *Soit M une variété vérifiant l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, la majoration du volume :*

$$V(x,R) \leq CR^n, \forall x \in M, \forall R > 0,$$

et sur laquelle la transformée de Riesz est bornée sur L^p pour un $p > 2$, alors

$$H_p^1(M) \simeq \{\alpha \in L^p(\Lambda^1 T^\star M),\, d\alpha = 0 \text{ et } d^\star\alpha = 0\}.$$

Si la courbure de Ricci de M est de plus minorée, le noyau de la chaleur sur les $1-$formes satisfait à $t > 0$ fixé :

$$e^{-t\vec{\Delta}} : L^2 \to L^\infty$$

(ceci provient de la formule de Bochner et de l'ultracontractivité de $e^{-t\Delta}$). On en déduit par interpolation que toute forme harmonique $\alpha \in L^2$ est dans L^p, puisqu'elle vérifie $e^{-t\vec{\Delta}}\alpha = \alpha$. Puis, en appliquant le Lemme 2.2.2, on obtient :

Lemme 2.2.3 *Sous les hypothèses du Lemme 2.2.2, et si la courbure de Ricci est minorée, alors l'application naturelle*

$$\mathcal{H}^1(M) \to H_p^1(M)$$

est injective.

Cependant, dans le cas de $M := \mathbb{R}^n \# \mathbb{R}^n$ pour $n \geq 3$ (qui vérifie bien l'inégalité de Sobolev de dimension n), cette application n'est pas injective pour $p \geq n$. En effet, du fait que M a deux bouts non-paraboliques, on peut trouver une fonction harmonique bornée h, telle que $\alpha := dh$ soit une forme harmonique L^2 non-nulle. Montrons alors que α est nulle en cohomologie L^p réduite, c'est-à-dire qu'on peut trouver une suite α_k de formes dans $dC_0^\infty(\Lambda^1 T^\star M)$, telles que $L^p - \lim_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha$: fixons o un point de M, et soit χ_k une fonction de coupure valant 1 sur $B(o,k)$, $\frac{\log(k^2/d(x,o))}{\log(k)}$ sur $B(o,k^2) \setminus B(o,k)$, et 0 sur $M \setminus B(o,k^2)$. On pose $\alpha_k := d(\chi_k h) = \chi_k dh + hd\chi_k$, et il suffit de voir que $hd\chi_k$ tend vers 0 dans L^p quand $k \to \infty$.

$$||hd\chi_k||_p^p \leq C||h||_\infty^p \int_k^{k^2} (\log(k)r)^{-p}\, dV(r).$$

Et par intégration par parties,

$$\int_k^{k^2} r^{-p} dV(r) = \frac{V(o,k^2)}{k^{2p}} - \frac{V(o,k)}{k^p} + p\int_k^{k^2} \frac{V(o,r)}{r^{p+1}} dr.$$

Utilisant le fait que la croissance du volume des boules de rayon R est en R^n, on voit que $\int_k^{k^2} r^{-p} dV(r)$ est borné lorsque $p > n$, et croît en $\log(k)$ si $p = n$. On en déduit que $hd\chi_k$ tend vers 0 dans L^p quand $k \to \infty$.

$\square$

2.2.3 Les variétés coniques

Définition 2.2.2 *Soit (N, h) une variété Riemannienne compacte de dimension $n-1$. La variété $M := (0, \infty) \times N$, munie de la métrique*

$$g = dt^2 + t^2 h,$$

*est dite **variété conique** de base compacte N.*

Une variété conique n'est pas complète, cependant le Laplacien est un opérateur auto-adjoint, ce qui fait qu'on peut considérer le noyau de la chaleur $p_t(x, y)$. En fait, une variété conique est stochastiquement complète, et le Théorème 2.1.6 s'étend à de telles variétés. L'étude de la transformée de Riesz sur les variétés coniques à base compacte a été faite par H.Q. Li [42], qui a montré le résultat suivant :

Théorème 2.2.4 *La transformée de Riesz sur une variété conique $M = (0, \infty) \times N$ est bornée sur L^p si et seulement si p appartient à l'intervalle :*

1. $(1, \infty)$ *si* $\lambda_1 \geq n-1$
2. $(1, p_0)$ *avec* $p_0 = \frac{n}{\frac{n}{2} - \sqrt{\lambda_1 + \left(\frac{n-2}{2}\right)^2}}$ *si* $\lambda_1 < n-1$,

où λ_1 est la première valeur propre non nulle du Laplacien sur N. Remarquons que dans tous les cas, $p_0 > n$.

Plus tard, Coulhon et Li ont montré dans [20] des estimées L^p du gradient du noyau de la chaleur, qui redonnent ce résultat (sauf pour le cas limite p_0) comme corollaire du Théorème 2.1.6, étant donné qu'une variété conique vérifie l'inégalité de Poincaré à l'échelle L^2 (et même L^1) :

Théorème 2.2.5 *Soit $M = (0, \infty) \times N$ une variété conique, alors on a les estimées suivantes du gradient du noyau de la chaleur :*

1. $|\nabla_x p_t(x, y)| \leq \frac{C}{\sqrt{t} V(x, \sqrt{t})}$, $\forall x \in M$, $\forall t > 0$ *si* $\lambda_1 \geq n-1$.
2. $||\nabla_x p_t(., y)||_p \leq \frac{C}{\sqrt{t} V(y, \sqrt{t})^{1-\frac{1}{p}}}$, $\forall y \in M$, $\forall t > 0$ *si et seulement si* $p \in (1, p_0)$ *si* $\lambda_1 < n-1$.

Remarque 2.2.2 *Une variété conique est en fait à croissance euclidienne du volume :*

$$V(x, R) \approx R^n,$$

ce qui permet de simplifier encore les estimées précédentes. Elle vérifie donc aussi (D).

Mentionnons aussi la généralisation par Guillarmou et Hassell ([38] et [39]) du Théorème 2.2.4 au cas des variétés **asymptotiquement coniques**. Ces variétés incluent en particulier les variétés dont les bouts sont isométriques en dehors d'un compact à une variété conique. Leur résultat est le suivant :

Théorème 2.2.6 *Soit M une variété asymptotiquement conique. Si M a un seul bout, la transformée de Riesz est bornée sur L^p si et seulement si $p \in (1, p_0)$ (avec pour convention $p_0 = \infty$ si $\lambda_1 \geq n-1$). Si M a plus d'un bout, la transformée de Riesz est bornée sur L^p si et seulement si $p \in (1, n)$.*

La preuve repose, comme pour le théorème de Carron-Coulhon-Hassell, sur la construction d'une bonne paramétrice pour la résolvante $(\Delta + k^2)^{-1}$ lorsque $k \to 0$. Elle utilise aussi le résultat de Li 2.2.4. De plus, lorsque $n > 3$ et que M a plusieurs bouts, ce résultat est aussi conséquence de [12] (pour le fait que la transformée de Riesz est bornée sur L^p pour $1 < p < n$) et de [13] (pour le fait que la transformée de Riesz n'est pas bornée sur L^p pour $p \geq n$).

2.3 Estimations du noyau de la chaleur sur les formes

2.3.1 Dominations de l'opérateur de la chaleur sur les formes

Nous avons déjà évoqué le résultat suivant (qui peut d'ailleurs se démontrer de plusieurs manières, voir [18] et [57]) :

Théorème 2.3.1 *Soit M une variété Riemannienne vérifiant* (D) *et* (G). *Supposons que l'estimée Gaussienne pour le noyau de la chaleur sur les 1-formes différentielles soit valable :*

$$||\vec{p_t}(x,y)|| \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} e^{-\frac{cd^2(x,y)}{t}}, \ \forall (x,y) \in M \times M, \ \forall t > 0, \tag{GF}$$

où $\vec{p_t}$ est le noyau de $e^{-t\vec{\Delta}}$. Alors la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p, pour tout $1 < p < \infty$.

Rappelons aussi un cas particulier du résultat de Auscher-Coulhon-Duong-Hofmann [5] :

Théorème 2.3.2 *Soit M une variété Riemannienne vérifiant* (D) *et* (G). *Supposons que l'estimée ponctuelle du noyau de la chaleur (G_∞) soit valable sur M :*

$$|\nabla_x p_t(x,y)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}V(y,\sqrt{t})}, \ \forall (x,y) \in M \times M, \ \forall t > 0,$$

alors la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p, pour tout $1 < p < \infty$.

En fait, Auscher-Coulhon-Duong-Hofmann montrent aussi le Lemme suivant, qui relie les Théorèmes 2.3.2 et 2.3.1 :

Lemme 2.3.1 *Sous les hypothèses* (D) *et* (G), *l'estimée ponctuelle hors-diagonale du gradient du noyau de la chaleur :*

$$|\nabla_x p_t(x,y)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}V(y,\sqrt{t})} e^{-c\frac{d^2(x,y)}{t}}, \ \forall (x,y) \in M \times M, \ \forall t > 0, \tag{G'_∞}$$

est équivalente à une domination faible sur les formes exactes :

$$|\nabla e^{-t\Delta} f|^2 \leq Ce^{-ct\Delta}|\nabla f|^2, \ \forall f \in C_0^\infty \tag{DE_w}$$

En particulier, sous les hypothèses (D) *et* (G), (G'_∞) *est vérifiée si on a la domination sur les formes exactes :*

$$|\nabla e^{-t\Delta} f| \leq Ce^{-ct\Delta}|\nabla f|, \ \forall f \in C_0^\infty \tag{DE}$$

De plus, une condition nécessaire pour qu'une des inégalités (G'_∞), (DE_w) et (DE) soit valable est que M vérifie l'inégalité de Poincaré (P).

Preuve :

Le fait que (DE_w) implique (G'_∞) utilise l'estimée L^2 à poids du gradient, montrée dans ([33]) : pour γ assez petit et pour tout $y \in M$,

$$\int_M |\nabla_x p_t(x,y)|^2 e^{\gamma\frac{d^2(x,y)}{t}} dx \leq \frac{C}{tV(y,\sqrt{t})} \tag{2.11}$$

Partant de là, on écrit :

$$\nabla_x p_t(x,y) = \int_M \nabla_x p_{t/2}(x,z) p_{t/2}(z,y)dz = \nabla e^{-\frac{t}{2}\Delta}\left(p_{t/2}(.,y)\right),$$

puis par (DE_w) et (2.11), on a successivement

$$\begin{aligned}
|\nabla_x p_t(x,y)|^2 &\leq C\left(\int_M p_{ct/2}(x,z)|\nabla_z p_{t/2}(z,y)|dz\right)^2 \\
&\leq \left(\sup_{z\in M} p_{ct/2}(x,z)e^{-\gamma\frac{d^2(y,z)}{t}}\right)\left(\int_M |\nabla_z p_{t/2}(z,y)|^2 e^{\gamma\frac{d^2(y,z)}{t}}dz\right) \\
&\leq \left(\sup_{z\in M} p_{ct/2}(x,z)e^{-\gamma\frac{d^2(y,z)}{t}}\right)\frac{C}{tV(y,\sqrt{t})}
\end{aligned}$$

Mais (G) implique (par l'inégalité triangulaire) que pour γ assez petit,

$$\left(\sup_{z\in M} p_{ct/2}(x,z)e^{-\gamma\frac{d^2(y,z)}{t}}\right) \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})}e^{-\gamma\frac{d^2(x,y)}{t}},$$

et de là on en déduit (G'_∞) grâce à (D).
Pour montrer la réciproque, on utilise le fait que l'estimée du gradient (G'_∞) implique l'inégalité de Poincaré L^2 à l'échelle (P), ainsi que les estimées de Li-Yau (L-Y). Soit $x \in M$, $B = B(x,\sqrt{t})$. On écrit, utilisant que sous nos hypothèses $e^{-t\Delta}1 = 1$ (M est stochastiquement complète) :

$$\begin{aligned}
\left(\nabla e^{-t\Delta}f\right)(x) &= \left(\nabla e^{-t\Delta}(f - f_{4B})\right)(x) \\
&= \int_M \nabla_x p_t(x,y)(f(y) - f_{4B})dy \\
&= \sum_{i\geq 1}\int_{C_i} \nabla_x p_t(x,y)(f(y) - f_{4B})dy
\end{aligned}$$

où $C_1 = 4B$ et $C_i = 2^{i+1}B\backslash 2^iB$ si $i \geq 2$. Expliquons comment majorer $\int_{C_1} \nabla_x p_t(x,y)(f(y) - f_{4B})$. On a par Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_{C_1} |\nabla_x p_t(x,y)||f(y) - f_{4B}|\right)^2 \leq \left(\int_{C_1} |\nabla_x p_t(x,y)|^2 dy\right)\left(\int_{C_1} |f(y) - f_{4B}|^2\right)dy.$$

Utilisant alors l'hypothèse (G'_∞), $\int_{C_1} |\nabla_x p_t(x,y)|^2 dy \leq \frac{C}{tV(x,\sqrt{t})}$. De plus, par l'inégalité de Poincaré (P),

$$\int_{C_1} |f(y) - f_{4B}|^2 dy \leq Ct\int_{C_1} |\nabla f|^2,$$

et donc

$$\left(\int_{C_1} |\nabla_x p_t(x,y)||f(y) - f_{4B}|\right)^2 \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})}\int_{C_1} |\nabla f|^2.$$

En utilisant (G'_∞), l'inégalité de Poincaré (P) et un argument itératif, on en déduit que (DE_w) est valable.
Il nous reste à expliquer pourquoi (DE) entraîne (DE_w). L'argument est présenté dans [18]. Si (DE) est valable, on a :

$$|\nabla e^{-t\Delta}f|^2 \leq C\left(e^{-ct\Delta}|\nabla f|\right)^2.$$

Le fait que $\left(e^{-t\Delta}|\nabla f|\right)^2 \leq e^{-t\Delta}|\nabla f|^2$ pour tout $t > 0$ vient de ce que la fonction carré est concave et le semi-groupe de la chaleur sous-Markovien : on écrit la fonction carré comme supremum de fonction affines $\alpha(x) = ax+b$. On utilise que $e^{-t\Delta}$ est positif, ce qui implique que

$$\sup(e^{-t\Delta}g, e^{-t\Delta}h) \leq e^{-t\Delta}\left(\sup(g,h)\right),$$

et on obtient en prenant le supremum sur les fonctions α de $\alpha\left(e^{-t\Delta}|\nabla f|\right)$:

$$\left(e^{-t\Delta}|\nabla f|\right)^2 \leq e^{-t\Delta}|\nabla f|^2.$$

□

Remarque 2.3.1 *(DE) peut être reformulée en terme de noyau de la chaleur sur les 1-formes différentielles : (DE) est équivalente à ce que*

$$||e^{-t\vec{\Delta}}df(x)|| \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})}\int_M e^{-c\frac{d^2(x,y)}{t}}||df(y)||dy, \ \forall f \in C_0^\infty(M),\ \forall t>0,\ \forall x \in M. \quad \text{(GE)}$$

De manière identique, l'estimée gaussienne pour le noyau de la chaleur sur les 1-formes (GF) *est équivalente à la domination :*

$$|e^{-t\vec{\Delta}}\omega| \leq Ce^{-ct\Delta}|\omega|,\ \forall \omega \in C_0^\infty(\Lambda^1 T^\star M),\ \forall t>0. \quad \text{(DF)}$$

Une question intéressante est alors de trouver des critères sur la variété Riemannienne M pour avoir l'une des dominations (DF), (DE), (DE_w). On a déjà mentionné que la domination :

$$|e^{-t\vec{\Delta}}\omega| \leq e^{-t\Delta}|\omega|,\ \forall \omega \in C_0^\infty(\Lambda^1 T^\star M),\ \forall t>0,$$

c'est-à-dire (DF) avec constantes 1, est équivalente à ce que la courbure de Ricci de M soit positive. Ceci repose sur la **formule de Bochner**, qui jouera comme on le verra par la suite un rôle crucial :

$$\vec{\Delta} = \nabla^\star\nabla + Ric, \quad \text{(B)}$$

où $\nabla^\star$ est l'adjoint formel de ∇, et où Ric est le champ d'endomorphismes symétriques associé au tenseur de Ricci. On espère que (DF) soit vérifiée pour des variétés un peu plus générales que des variétés à courbure de Ricci positive, cependant aucune condition suffisante pour avoir (DF), qui soit plus générale que $Ric \geq 0$, n'avait été trouvée jusqu'ici. Concernant les dominations (DE) et (DE_w), on a les résultats suivants, dûs à H.Q. Li (cf [42], [43] et [44]) :

Théorème 2.3.3 *Soit $M = (0,\infty)\times N$ une variété conique, telle que $\lambda_1(N) \geq n-1$. Alors la domination faible sur les formes exactes (DE_w) est valable sur M.*

Théorème 2.3.4 *Sur le groupe de Heisenberg de dimension 3, la domination sur les formes exactes (DE) est valable.*

2.3.2 Asymptotique en temps long du noyau de la chaleur sur les formes

Dans un article récent [23], Coulhon et Zhang étudient l'asymptotique quand $t \to \infty$ du noyau de la chaleur sur les 1-formes. Notons $V(x) = \lambda^-(x)$, la partie négative de la plus petite valeur propre de $Ric(x)$. On a la propriété de domination suivante :

$$||\vec{p_t}(x,y)|| \leq p_t^V(x,y), \tag{2.12}$$

où p_t^V désigne le noyau de $e^{-t(\Delta - V)}$. Une idée pour estimer le comportement quand $t \to \infty$ de $e^{-t\vec{\Delta}}$ est donc d'étudier le comportement quand $t \to \infty$ de $p_t^V(x,y)$. Cependant, bien que le Laplacien de Hodge $\vec{\Delta}$ soit positif, il n'en est à priori pas de même pour l'opérateur de Schrödinger $H := \Delta - V$, et la non-positivité de H ruine tout espoir d'avoir des estimées non-exponentielles en temps pour e^{-tH}. En fait, la bonne hypothèse à faire sur H est de demander que H soit **fortement positif**, ou que V soit **sous-critique**, c'est-à-dire qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\int_M V\varphi^2 \leq (1-\varepsilon) \int_M |\nabla \varphi|^2, \, \forall \varphi \in C_0^\infty(M). \tag{2.13}$$

C'est traduire dans le langage des formes quadratiques l'inégalité $\Delta - V \geq \varepsilon \Delta$. En adaptant des travaux de Simon et Davies [25], valables sur $\mathbb{R}^n$, Coulhon et Zhang montrent le résultat suivant :

Théorème 2.3.5 *Soit M une variété Riemannienne vérifiant* (D)*,* (G)*, $V(x,1) \geq C$, et dont la partie négative de la courbure de Ricci est dans $L^\infty \cap L^q$ pour un certain $1 \leq q < \infty$. On fait l'hypothèse de forte positivité de $\Delta - V$, où $V(x) = \lambda^-(x)$ comme précédemment. Alors pour tout $t > 0$ et $x, y \in M$,*

$$||\vec{p_t}(x,y)|| \leq C \min\left(\frac{t^\alpha}{V(x,\sqrt{t})}, 1\right) e^{-c\frac{d^2(x,y)}{t}}, \tag{2.14}$$

*où α est **strictement positif** et dépend de q et de la constante ε qui intervient dans l'hypothèse de forte positivité* (2.13) *; par exemple, si $q \geq 2$, on peut prendre*

$$\alpha = (q - 1 + \eta)(1 - \varepsilon),$$

pour tout $\eta > 0$.

Faisons quelques commentaires sur ce résultat. On voit que l'estimée obtenue diffère de l'estimée Gaussienne par un terme polynomial en temps t^α. Le problème de ce terme polynomial est que l'on ne peut pas déduire de (2.14) que la transformée de Riesz est bornée sur L^p pour certains $p > 2$, contrairement à l'estimée Gaussienne qui donnerait elle que la transformée de Riesz est bornée sur L^p pour tout $1 < p < \infty$. De plus, concernant l'hypothèse de forte positivité de $\Delta - V$, bien que V provienne du tenseur de Ricci, l'interprétation géométrique du fait que $\Delta - V$ soit fortement positif n'est pas si claire.

Expliquons maintenant l'idée de la preuve du Théorème 2.3.5. De par la définition du potentiel V, on a la domination suivante (cf [41]) :

$$||\vec{p_t}(x,y)|| \leq p_t^V(x,y), \, \forall t > 0 \, \forall x, y \in M, \tag{2.15}$$

où $p_t^V(x,y)$ est le noyau associé au semi-groupe $e^{-t(\Delta - V)}$. Il suffit donc d'estimer $p_t^V(x,y)$, ce qui est plus facile étant donné que $e^{-t(\Delta - V)}$ agit sur les fonctions et non plus sur les formes différentielles. On a à notre disposition tout un ensemble de techniques mises au point pour obtenir des estimées Gaussiennes sur le semi-groupe $e^{-t\Delta}$ agissant sur les fonctions. La principale différence entre $e^{-t(\Delta - V)}$ et $e^{-t\Delta}$ est que $e^{-t(\Delta - V)}$ n'est pas sous-markovien, c'est-à-dire qu'on n'a pas $e^{-t(\Delta-V)}1 \leq 1$. En effet, cette propriété est équivalente à ce que $||e^{-t(\Delta-V)}||_{\infty,\infty} \leq 1$, et ce que Coulhon-Zhang montrent c'est que $||e^{-t(\Delta-V)}||_{\infty,\infty} \leq Ct^\beta$ pour $t \geq 1$, où $\beta > 0$ dépend des données du problème. Une fois obtenue l'estimée sur $||e^{-t(\Delta-V)}||_{\infty,\infty}$, la méthode pour obtenir des estimées Gaussiennes du semi-groupe de la chaleur procède essentiellement en deux étapes. La première porte le nom de *méthode de Nash*, et permet d'obtenir des estimées diagonales pour le noyau de la chaleur. Pour simplifier, nous supposerons que sur M **l'inégalité de Nash** est vérifiée :

$$||f||_2^{2\left(1+\frac{2}{n}\right)} \leq C||f||_1^{\frac{4}{n}}||\nabla f||_2^2, \, \forall f \in C_0^\infty \tag{N}$$

Par exemple, (N) est vérifiée si M vérifie l'inégalité de Sobolev $(\mathcal{S}_n)$. Nous nous placerons aussi dans le cadre où

$$||e^{-t(\Delta-V)}||_{\infty,\infty} \leq C, \, \forall t > 0,$$

ou ce qui revient au même par dualité

$$||e^{-t(\Delta-V)}||_{1,1} \leq C, \, \forall t > 0,$$

et continuons de supposer $\Delta - V$ fortement positif. Nous allons montrer que ces hypothèses impliquent que

$$p_t^V(x,y) \leq \frac{C}{t^{n/2}}.$$

Pour cela, il suffit de montrer que $||e^{-t(\Delta-V)}||_{1,2} \leq \frac{C}{t^{n/4}}$, puisque $p_t^V(x,y) \leq \frac{C}{t^{n/2}}$ est équivalent à ce que $||e^{-t(\Delta-V)}||_{1,\infty} \leq \frac{C}{t^{n/2}}$. Soit $f \in L^1$, et soit $u_t = e^{-t(\Delta-V)}f$, alors u_t est solution de

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} + (\Delta - V)u_t = 0,$$

et on a donc, grâce à la forte positivité et à l'inégalité de Nash

$$\begin{aligned} -\tfrac{d}{dt}\langle u_t, u_t\rangle &= -2\langle \tfrac{\partial u_t}{\partial t}, u_t\rangle \\ &= 2\langle(\Delta - V)u_t, u_t\rangle \\ &\geq 2\varepsilon\langle \Delta u_t, u_t\rangle \\ &\geq 2\varepsilon||\nabla u_t||_2^2 \\ &\geq 2C\varepsilon||u_t||_2^{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}||u_t||_1^{-\frac{4}{n}} \end{aligned}$$

De plus, par hypothèse $||u_t||_1 = ||e^{-t(\Delta-V)}f||_1 \leq C||f||_1$, et on obtient donc

$$-\frac{d}{dt}||u_t||_2^2 \geq C||u_t||_2^{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}||f||_1^{-\frac{4}{n}}.$$

D'où, en posant $\varphi(t) = ||u_t||_2^2$,

$$-\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^{1+\frac{2}{n}}} \geq C||f||_1^{-\frac{4}{n}}.$$

Intégrant ceci par rapport à t, on trouve

$$\varphi(t)^{-\frac{2}{n}} \geq \varphi(t)^{-\frac{2}{n}} - \varphi(0)^{-\frac{2}{n}} \geq Ct||f||_1^{-4/n},$$

qui donne

$$||e^{-t(\Delta-V)}f||_2^2 = \varphi(t) \leq \frac{C}{t^{n/2}}||f||_1^2,$$

ce qu'on voulait. La preuve de l'estimée diagonale faite par Coulhon-Zhang est dans le même esprit, mais plus élaborée parce que l'inégalité de Nash n'est plus valable, et on a une borne polynomiale sur $||e^{-t(\Delta-V)}||_{\infty,\infty}$ au lieu d'une borne uniforme (leur preuve s'inspire en fait de l'article de Grigor'yan [32]). La deuxième étape, qui consiste à passer de l'estimée diagonale à l'estimée hors-diagonale, peut être réalisé de plusieurs manières, par exemple la méthode de perturbation de Davies ou la méthode de l'équation des ondes de Sikora (voir [56] et [57]). Expliquons à présent pourquoi on a une borne polynomiale de $||e^{-t(\Delta-V)}||_{\infty,\infty}$ pour $t \geq 1$. L'argument provient de l'article de E.B. Davies et B. Simon [25]. Si $T_t = e^{-t(\Delta-V)}$, T_t est solution de

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} + T_t\Delta = T_tV = \Phi,$$

et donc par la formule de Duhamel :

$$e^{-t(\Delta-V)} = e^{-t\Delta} + \int_0^t e^{-s(\Delta-V)}Ve^{-(t-s)\Delta}ds.$$

Puis, étant donné que l'hypothèse (D) faite sur M implique que $e^{-t\Delta}1 = 1$,

$$e^{-t(\Delta-V)}1 \leq 1 + \int_0^t e^{-s(\Delta-V)}Vds.$$

De la même manière, on a

$$e^{-(t+1)(\Delta-V)} = e^{-(t+1)\Delta} + \int_0^t e^{-(s+1)(\Delta-V)}Ve^{-(t-s)\Delta}ds,$$

et donc

$$e^{-(t+1)(\Delta-V)}1 \leq 1 + \int_0^t e^{-(s+1)(\Delta-V)}Vds \tag{2.16}$$

Faisons pour simplifier l'hypothèse que M vérifie l'inéglité de Sobolev $(\mathcal{S}_n)$, alors la forte positivité de $\Delta - V$ implique que l'on a aussi une inégalité de Sobolev pour $\Delta - V$:

$$||f||_{\frac{2n}{n-2}} \leq C\langle(\Delta-V)f, f\rangle, \forall f \in C_0^\infty(M).$$

Attention, ici on ne peut pas appliquer le résultat de Varopoulos [60] pour en déduire qu'on a l'estimée d'ultracontractivité :

$$||e^{-t(\Delta-V)}||_{1,\infty} \leq \frac{C}{t^{n/2}}, \forall t > 0,$$

car le semi-groupe $e^{-t(\Delta-V)}$ n'est pas sous-markovien ! Cependant, on a quand même :

$$||e^{-t(\Delta-V)}||_{2,\infty} \leq \frac{C}{t^{1/2}}, \forall t \geq 1. \tag{2.17}$$

En effet,

$$||e^{-t(\Delta-V)}||_{\frac{2n}{n+2},2} \leq t^{-1/2}||(\Delta-V)^{1/2}t^{1/2}e^{-t(\Delta-V)}||_{2,2}||(\Delta-V)^{-1/2}||_{\frac{2n}{n+2},2},$$

et $||(\Delta - V)^{-1/2}||_{\frac{2n}{n+2},2} \leq C$ directement par l'inégalité de Sobolev, ce qui implique, en utilisant l'analyticité sur L^2 de $e^{-t(\Delta-V)}$, que $||e^{-t(\Delta-V)}||_{\frac{2n}{n+2},2} \leq \frac{C}{t^{1/2}}$. Puis par dualité,

$$||e^{-t(\Delta-V)}||_{2,\frac{2n}{n-2}} \leq Ct^{-1/2},\ \forall t > 0,$$

et il suffit alors d'utiliser le fait que $||e^{-(\Delta-V)}||_{\frac{2n}{n-2},\infty} \leq C$ pour conclure qu'on a (2.17). Utilisant ceci, on a par interpolation,

$$||e^{-t(\Delta-V)}||_{p,\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{p}} \left(||e^{-t(\Delta-V)}||_{\infty,\infty}\right)^{1-\frac{2}{p}} \tag{2.18}$$

Notons alors

$$c(t) = \sup\{||e^{-(s+1)(\Delta-V)}||_{\infty,\infty}\ :\ 0 \leq s \leq t\},$$

alors (2.16) et (2.18) donnent, pour tout $t \geq 1$:

$$c(t) \leq Cc(t)^{1-\frac{2}{p}}t^{1-\frac{1}{p}},$$

ce qui conduit à $c(t) \leq Ct^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}$ pour $t \geq 1$.

□

Comment améliorer le résultat de Coulhon-Zhang pour avoir l'estimée Gaussienne pour le noyau de la chaleur sur les 1-formes, c'est-à-dire pour se débarasser du terme polynomial en temps de (2.14) ? Un résultat dans cette direction est l'article de B. Simon [58], dans lequel est montré :

Théorème 2.3.6 *Soit $V \geq 0$ un potentiel dans $L^{\frac{n}{2}\pm\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$. On considère l'opérateur de Schrödinger $\Delta - V$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors*

$$||e^{-t(\Delta-V)}||_{\infty,\infty} \leq C,\ \forall t > 0$$

si et seulement si $\Delta - V$ est fortement positif.

En fait, la preuve de Simon consiste à montrer que chacune des deux assertions précédentes est équivalente à l'existence de $\eta \in L^\infty$, minorée par une constante strictement positive, telle que

$$(\Delta - V)\eta = 0.$$

Quelques commentaires à propos du résultat de Simon : le fait que la variété sous-jacente soit $\mathbb{R}^n$ n'est pas tellement un problème, en fait la preuve de Simon peut être adaptée sous l'hypothèse que M vérifie l'inégalité de Sobolev $(\mathcal{S}_n)$. A partir de là, il est possible de montrer le résultat suivant :

Théorème 2.3.7 *Soit M une variété Riemanienne complète qui vérifie* (D), (G)*, l'inégalité de Sobolev $(\mathcal{S}_n)$, et telle que $Ric_+ \in L^p$ pour un certain p. Supposons aussi que $V(x,R) \simeq R^n$ pour $R \geq 1$. Soit $V(x) = \lambda^-(x)$ la partie négative de la plus petite valeur propre de $Ric(x)$. On suppose que $V \in L^{\frac{n}{2}\pm\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$ et que $\Delta - V$ est fortement positif. Alors on a l'estimée Gaussienne du noyau de la chaleur sur les 1-formes* (GF) *:*

$$||\vec{p_t}(x,y)|| \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})}e^{-c\frac{d^2(x,y)}{t}},\ \forall t > 0,\ \forall x,y \in M \tag{2.19}$$

Ce résultat était l'un des premiers obtenus dans cette thèse. Cependant, comme nous l'avons amélioré par la suite, nous n'en fournissons pas la démonstration maintenant, puisqu'elle sera un cas particulier de résultats obtenus ultérieurement. Nous avons dit que l'hypothèse de forte positivité de $\Delta - V$ n'avait pas une interprétation géométrique très claire : en fait, demander que $\Delta - V$ soit fortement positif revient à demander que $\Delta - V \geq 0$, et que, dans un certain sens, $\Delta - V$ n'ait pas de noyau. Le problème est que le noyau de $\Delta - V$ n'a pas d'interprétation géométrique. Considérons maintenant le problème du point de vue des formes différentielles : la formule de Bochner (B) s'écrit

$$\vec{\Delta} = \nabla^\star \nabla + Ric.$$

Le terme $\nabla^\star\nabla$, appelé parfois aussi **Laplacien brut** et noté $\bar{\Delta}$, se comporte comme le Laplacien agissant sur les fonctions dans beaucoup de situations, et on peut alors interpéter la formule de Bochner comme le fait que $\vec{\Delta}$ est un opérateur de type Schrödinger, avec un « potentiel » qui est la courbure de Ricci. Que gagne-t-on à travailler ainsi avec cet opérateur sur les formes ? Déjà, $\vec{\Delta}$, contrairement à $\Delta - V$, est toujours positif, donc on peut se débarasser de l'hypothèse de positivité qui est de toute façon vérifiée. Ensuite, nous avons mentionné le fait que la forte positivité d'un opérateur de Schrödinger correspond à une certaine nullité de son noyau. Mais le noyau de $\vec{\Delta}$, contrairement à celui de $\Delta - V$, a clairement une interprétation géométrique, puisque ses éléments sont des 1-formes harmoniques ! On va donc chercher à adapter le Théorème 2.3.7 pour pouvoir traiter directement le cas de « l'opérateur de Schrödinger » $\vec{\Delta}$. Il y a plusieurs obstacles à cela : premièrement, la preuve de Simon ne va pas s'adapter car l'existence de $\eta \in L^\infty$, minorée par une constante strictement positive, telle que

$$(\Delta - V)\eta = 0,$$

n'a pas d'équivalent pour $\vec{\Delta}$. Deuxièmement, et c'est là le principal problème, étant donné qu'on travaille avec un opérateur agissant sur les sections d'un fibré, la notion de positivité n'a plus de sens, ce qui nous prive de beaucoup de techniques développées dans le contexte des opérateurs de Schrödinger.

2.4 Présentation des résultats

Dans cette section, nous présentons les résultats que nous avons obtenus dans l'étude de la transformée de Riesz sur les variétés Riemanniennes non-compactes. Tout d'abord, nous généralisons le résultat de Simon 2.3.6 au cas d'opérateurs de Schrödinger généralisés du type :

$$L = \nabla^\star \nabla + \mathcal{R},$$

agissant sur les sections d'un fibré Riemannien au-dessus de M, $\mathcal{R}$ étant un champ d'endomorphismes symétriques. Nous décomposerons le tenseur $\mathcal{R}$ en somme d'une partie positive et d'une partie négative :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_+ - \mathcal{R}_-,$$

où $\mathcal{R}_-(x)$ correspond aux valeurs propres negatives ou nulles de l'endomorphisme symétrique $\mathcal{R}(x)$.

Notation : Pour deux fonctions réelles positives f et g, on notera

$$f \simeq g$$

lorsqu'il existe deux constantes strictement positives C_1, C_2 telles que

$$C_1 f \leq g \leq C_2 f.$$

Notre résultat est le suivant :

Théorème 2.4.1 *Soit M une variété Riemannienne complète, non-compacte, de dimension m. On suppose que M vérifie l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, et que le volume des boules de grand rayon est euclidien de dimension n :*

$$V(x,R) \simeq R^n,\ \forall x \in M,\ \forall R \geq 1.$$

Soit $E \to M$ un fibré vectoriel Riemannien, muni d'une connexion compatible ∇, et soit L un opérateur de type Schrödinger agissant sur les sections de E :

$$L = \nabla^\star \nabla + \mathcal{R},$$

$\mathcal{R}$ étant un champ d'endomorphismes symétriques. Supposons que L soit positif, que $\mathcal{R}_-$ soit dans $L^{\frac{n}{2}-\varepsilon} \cap L^\infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$, et que

$$Ker_{L^2}(L) = \{0\}.$$

Alors on a des estimées Gaussiennes pour e^{-tL} : si l'on note $K_{\exp(-tL)}(x,y)$ son noyau, alors pour tout $\delta > 0$, il y a deux constantes C et c telles que

$$||K_{\exp(-tL)}(x,y)|| \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right),\ \forall (x,y) \in M \times M,\ \forall t > 0.$$

Dans le cas particulier du Laplacien de Hodge-DeRham agissant sur les 1-formes différentielles, on obtient aussi un résultat pour la transformée de Riesz :

Théorème 2.4.2 *Soit M une variété Riemannienne complète, non-compacte, de dimension m. On fait les hypothèses que M vérifie l'inégalité de Sobolev $(\mathcal{S}_n)$, que le volume des boules de grand rayon est euclidien de dimension n :*

$$V(x,R) \simeq R^n,\ \forall x \in M,\ \forall R \geq 1,$$

et que la partie négative du tenseur de Ricci est dans $L^{\frac{n}{2}-\varepsilon} \cap L^\infty$, pour un certain $\varepsilon > 0$. On suppose aussi que $\mathcal{H}^1(M)$, l'espace des 1-formes harmoniques L^2, est nul :

$$\mathcal{H}^1(M) = \{0\} \tag{2.20}$$

Alors l'estimée gaussienne (GF) *pour le noyau de la chaleur sur les 1-formes différentielles est valable :*

$$||\vec{p_t}(x,y)|| \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} e^{-c\frac{d^2(x,y)}{t}},\ \forall t > 0,\ \forall x,y \in M.$$

Par conséquent, la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p, pour tout $1 < p < \infty$.

Faisons quelques commentaires sur ce résultat. Tout d'abord, n n'est pas nécessairement égal à la dimension m de M, on a seulement l'inégalité $n \geq m$. Ensuite, l'hypothèse (2.20) est une hypothèse de forte positivité de $\vec{\Delta}$, comme nous le verrons par la suite. De plus, cette hypothèse n'est naturellement pas vérifiée pour la variété consistant en la somme connexe de deux espaces euclidiens $M = \mathbb{R}^n \# \mathbb{R}^n$, alors que M vérifie toutes les autres hypothèses du théorème. Cela vient du fait qu'il existe sur M une fonction harmonique

h, non-constante, telle que $dh \in L^2$ (c.f. [45]). Alors $\omega := dh$ est une 1-forme harmonique non-nulle, dans L^2.

De plus, on verra dans la preuve qu'il existe un $\eta > 0$ dépendant de la constante de Sobolev, tel que si

$$||Ric_-||_{\frac{n}{2}} < \eta,$$

alors $Ker_{L^2}(\vec{\Delta}) = \{0\}$. Cette remarque va nous permettre d'étendre notre résultat au cas où l'hypothèse $Ker_{L^2}(\vec{\Delta}) = \{0\}$ n'est pas vérifiée. Inspirés par l'exemple de la somme connexe de deux espaces euclidiens $\mathbb{R}^n \# \mathbb{R}^n$, on veut montrer que sans l'hypothèse sur le noyau de $\vec{\Delta}$, la transformée de Riesz est bornée sur L^p pour tout $1 < p < n$. Pour cela, on va utiliser un argument de perturbation : on choisit un potentiel positif V lisse à support compact, tel que

$$||(Ric + V)_-||_{\frac{n}{2}} < \eta,$$

de sorte que le noyau de l'opérateur $e^{-t(\vec{\Delta}+V)}$ satisfera des estimées Gaussiennes. On montrera alors, en utilisant la méthode de construction de paramétrice de Carron [12], que

$$d(\Delta + V)^{-1/2} : L^p \to L^p \text{ borné si } 1 < p < n,$$

et que

$$d\Delta^{-1/2} - d(\Delta + V)^{-1/2} : L^p \to L^p \text{ borné si } 1 < p < n,$$

et donc que la transformée de Riesz est bornée sur L^p pour $1 < p < n$. En résumé, on montre le résultat suivant :

Théorème 2.4.3 *Soit M une variété Riemannienne complète, non-compacte, de dimension m. On fait les hypothèses que M vérifie l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, que le volume des boules de grand rayon est euclidien de dimension n :*

$$V(x, R) \simeq R^n, \, \forall x \in M, \, \forall R \geq 1,$$

et que la partie négative du tenseur de Ricci est dans $L^{\frac{n}{2}-\varepsilon} \cap L^\infty$, pour un certain $\varepsilon > 0$. On suppose de plus $n > 3$. Alors la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p pour tout $1 < p < n$.

Ce résultat est à mettre en parallèle avec le résultat de Bakry (Théorème 2.2.1) ; en fait, toute une variété à courbure de Ricci positive de dimension n et de croissance du volume maximal, c'est-à-dire vérifiant :

$$V(x, R) \geq CR^n, \, \forall x, \, \forall R > 0,$$

satisfait l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, et donc rentre dans le cadre de notre Théorème 2.4.3. Remarquons aussi que le Théorème 2.4.3 est un résultat « intrinsèque » sur la transformée de Riesz, par opposition aux résultat « de perturbation » comme [12] ou [16] : on n'a pas besoin de supposer que M est une perturbation d'une variété sur laquelle la transformée de Riesz est bornée.
On fera aussi une étude de la cohomologie L^p, qui conduira au résultat suivant, récapitulant les résultats précédents :

Théorème 2.4.4 *Soit M une variété Riemannienne complète non-compacte, vérifiant l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, et dont le volume des boules de grand rayon est euclidien de dimension n :*

$$V(x,R) \simeq R^n, \, \forall x \in M, \, \forall R \geq 1.$$

On suppose que la partie négative de la courbure de Ricci est dans $L^{\frac{n}{2}-\varepsilon} \cap L^\infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$. On a alors l'alternative suivante :

1. *$\mathcal{H}^1(M)$, l'espace des 1-formes harmoniques L^2, est trivial. Alors pour tout $1 < p < \infty$, la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p et $H_p^1(M)$, le premier espace de cohomologie L^p réduite de M, est trivial.*
2. *$\mathcal{H}^1(M)$, l'espace des 1-formes harmoniques L^2, n'est pas trivial. Si $n > 3$, alors pour tout $1 < p < n$, la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p, et $H_p^1(M) \simeq \mathcal{H}^1(M)$. Et si M a plusieurs bouts, pour $p \geq n$ la transformée de Riesz sur M n'est pas bornée et $H_p^1(M)$ n'est pas isomorphe à $\mathcal{H}^1(M)$.*

Il serait intéressant de voir si, dans la classe de variétés considérées, le fait d'avoir plusieurs bouts est la seule obstruction au fait que la transformée de Riesz soit bornée sur L^p pour tout $1 < p < \infty$. Plus précisément, on fait la conjecture suivante :

Conjecture 1 *Soit M une variété Riemannienne complète non-compacte, vérifiant l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, et dont le volume des boules de grand rayon est euclidien de dimension n :*

$$V(x,R) \simeq R^n, \, \forall x \in M, \, \forall R \geq 1.$$

On suppose que la partie négative de la courbure de Ricci est dans $L^{\frac{n}{2}-\varepsilon} \cap L^\infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Alors si M a un seul bout, la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p, et $H_p^1(M) \simeq \mathcal{H}^1(M)$, pour tout $1 < p < \infty$.

Il y a plusieurs stratégies possibles pour s'attaquer à cette conjecture. Une première approche serait de montrer une estimée Gaussienne sur les formes exactes. Une seconde possibilité serait d'améliorer le résultat de perturbation de [12], pour ne plus avoir la limitation $p < n$ dans le cas où la variété n'a qu'un seul bout, et de s'inspirer de notre démonstration du fait que la transformée de Riesz est bornée sur L^p pour $1 < p < n$.
Motivés par cette conjecture, nous avons amélioré le résultat de perturbation de [12] dans deux directions, pour s'affranchir de la limitation $p < n$: dans le cas où M est p-hyperbolique, et dans le cas où M n'a qu'un seul bout. Ainsi, nous montrons le résultat suivant :

Théorème 2.4.5 *Soit $n > 2$. Soient M, M_0 deux variétés Riemanniennes (pas nécessairement connexes), isométriques en-dehors d'un compact, ayant courbure de Ricci minorée et vérifiant l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$. On suppose que la transformée de Riesz sur M_0 est bornée sur L^q, pour un certain $q > \frac{n}{n-2}$. Soit $\frac{n}{n-1} < p < q$ tel que la transformée de Riesz sur M_0 soit bornée sur L^p, et tel que l'on soit dans l'une des deux situations suivantes :*

1. *M_0 est p-hyperbolique.*
2. *ou M n'a qu'un seul bout.*

Alors la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p.

Ceci améliore dans un certain sens un résultat de perturbation de Coulhon et Dungey [16], selon lequel le fait que la transformée de Riesz soit bornée sur L^p est stable sous certaines perturbations de la métrique de la variété. Le résultat de Coulhon et Dungey ne disait cependant rien sur ce qui se passe lorsque l'on change la topologie de la variété sous-jacente. Notre résultat dit que pour les variétés vérifiant l'inégalité de Sobolev et ayant un seul bout, on peut changer la métrique **et la topologie** sur un compact, sans (presque) rien changer pour la transformée de Riesz. Remarquons de plus que la restriction topologique que M ait un seul bout est nécessaire, comme on le voit on considérant l'exmple de $\mathbb{R}^n\#\mathbb{R}^n$. Notons pour une variété M,

$$I(M) = \{p \in (1,\infty) : d\Delta^{-1/2} \text{ bornée sur } L^p\}.$$

$I(M)$ est un intervalle, de la forme $(1, p_0)$ ou $(1, p_0]$ lorsque la mesure sur M est doublante et qu'on a l'estimée Gaussienne du noyau de la chaleur (d'après le Théorème 2.1.4). Notre résultat montre qu'en fait, dans la classe des variétés vérifiant l'inégalité de Sobolev et ayant un seul bout, changer la topologie sur un compact ne modifie pas l'intervalle $I(M)$, sauf peut-être à l'extrémité p_0. Il est de plus conjecturé que $I(M)$ est toujours un ouvert, et si c'était le cas, on obtiendrait que dans la classe des variétés vérifiant l'inégalité de Sobolev et ayant un seul bout, $I(M)$ est invariant par changement de topologie sur un compact.

Puis, nous montrons qu'il n'est pas possible de supposer dans le Théorème 2.7.2 que M est p-hyperbolique à la place de M_0 p-hyperbolique, et ceci comme conséquence du résultat suivant :

Théorème 2.4.6 *Soit $n \geq 3$. Soit N une variété p-hyperbolique pour un $p > n$, à courbure de Ricci minorée et de volume infini. Alors la transformée de Riesz sur $\mathbb{R}^n\#N$ n'est pas bornée sur L^q pour $q > n$.*

Remarque 2.4.1 *Par exemple, on obtient que sur $\mathbb{H}^n\#\mathbb{R}^n$, la transformée de Riesz n'est pas bornée sur L^p pour $p > n$ lorsque $n \geq 3$. On sait par ailleurs d'après [12] que la transformée de Riesz sur $\mathbb{R}^n\#\mathbb{H}^n$ est bornée sur L^p pour $\frac{n}{n-1} < p < n$ si $n > 3$. En fait, il doit être possible d'adapter les techniques de [13] pour montrer que sur $\mathbb{R}^n\#\mathbb{H}^n$, pour $n \geq 2$, la transformée de Riesz est bornée sur L^p si et seulement si $1 < p < n$ ($1 < p \leq 2$ si $n = 2$). Notre approche est plus élémentaire, et n'utilise pas le b-calcul, mais en contrepartie, le résultat obtenu est plus faible dans le cas de cet exemple-là.*

2.5 Estimée gaussienne pour un opérateur de Schrödinger

2.5.1 Préliminaires analytiques

On considère un fibré Riemannien E au-dessus d'une variété Riemannienne M, muni d'une connexion ∇ compatible avec la métrique sur E. On notera $C_0^\infty(E)$ l'espace des sections de E lisses à support compact, et $L^p(E)$ l'espace des sections ω de E telles que $\int_M |\omega(x)|^p dx < \infty$, où dx est la mesure Riemannienne sur M. On définit le **Laplacien brut** agissant sur les sections de E par :

$$\bar{\Delta} := \nabla^\star\nabla,$$

où $\nabla^\star$ est l'adjoint formel de ∇. On va considérer dans cette section un opérateur H de la forme :

$$H := \bar{\Delta} + \mathcal{R}_+,$$

où $\mathcal{R}_+$ est un champ d'endomorphismes symétriques *positifs* agissant sur les fibres de E. Notons q_H la forme quadratique associée à H :

$$q_H(\omega) = \int_M |\nabla\omega|^2 + \int_M \langle \mathcal{R}_+\omega, \omega\rangle,$$

et q_Δ la forme quadratique associée au Laplacien sur les fonctions :

$$q_\Delta(u) = \int_M |du|^2.$$

La preuve de Strichartz du fait que Δ est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(M)$ lorsque M est complète s'étend à notre cadre, montrant que H est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(E)$ lorsque M est complète. H va se comporter comme le Laplacien agissant sur les fonctions de M, et cela est dû à la propriété de domination suivante (cf [8]) :

Proposition 2.5.1 *Pour toute section $\omega \in C_0^\infty(E)$, $|\omega|$ est dans $W^{1,2}(M)$ et on a :*

$$q_H(\omega) \geq q_\Delta(|\omega|).$$

On dit, suivant la terminologie de Bérard et Besson [8], que Δ domine H.

On a, comme conséquence de ceci :

Corollaire 2.5.1 *Pour tout $\omega \in C_0^\infty(E)$,*

$$|e^{-tH}\omega| \leq e^{-t\Delta}|\omega|,\ \forall t \geq 0 \tag{2.21}$$

et

$$|H^{-\alpha}\omega| \leq \Delta^{-\alpha}|\omega|,\ \forall \alpha > 0. \tag{2.22}$$

Preuve :

(2.21) est montrée dans Bérard-Besson, et (2.22) est une conséquence des formules :

$$H^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-tH} t^{\alpha-1} dt$$

et

$$\Delta^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t\Delta} t^{\alpha-1} dt.$$

$\square$

De plus, puisque $e^{-t\Delta}$ est un semi-groupe de contractions sur L^p pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on a par la domination de la Proposition 2.5.1 :

Corollaire 2.5.2 *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, e^{-tH} est un semi-groupe de contractions sur L^p.*

Le fait que e^{-tH} soit un semi-groupe de contractions sur L^p pour tout $1 \leq p \leq \infty$ donne, par le théorème de Stein ([59] p.67) :

Théorème 2.5.1 *e^{-tH} est un semi-groupe analytique borné sur L^p, pour tout $1 < p < \infty$: pour z dans le secteur $\left\{Arg(z) < \frac{\pi}{2}\left(1 - \left|\frac{2}{p} - 1\right|\right)\right\}$, $z \mapsto e^{-zH}$ est analytique bornée sur $L^p(E)$, et en fait $||e^{-zH}||_{p,p} \leq 1$ sur ce secteur.*

Rappelons les conséquences suivante de l'analyticité d'un semi-groupe, qui proviennent du calcul fonctionnel de Dunford-Schwarz (voir [52], p.249) :

Corollaire 2.5.3 *Soit e^{-zA} un semi-groupe analytique sur un espace de Banach X. Alors il existe une constante C telle que pour tout $\alpha > 0$:*

1. $$||A^\alpha e^{-tA}|| \leq \frac{C}{t^\alpha},\ \forall t > 0.$$
2. $$||(I + tA)^\alpha e^{-tA}|| \leq C,\ \forall t > 0.$$

Dans la suite de cette section, on suppose que M vérifie **l'inégalité de Sobolev** d'indice n, c'est-à-dire que

$$||f||_{\frac{2n}{n-2}} \leq C||df||_2,\ \forall f \in C_0^\infty(M) \tag{$\mathcal{S}_n$}$$

Dit en d'autres termes,

$$||f||_{\frac{2n}{n-2}} \leq Cq_\Delta(f)^{1/2},\ \forall f \in C_0^\infty(M),$$

et en appliquant la domination de la Proposition 2.5.1, on obtient :

Proposition 2.5.2 *H vérifie une inégalité de Sobolev : il existe une constante C telle que pour tout $\omega \in C_0^\infty(E)$,*

$$||\omega||_{\frac{2n}{n-2}} \leq Cq_H(\omega)^{1/2}. \tag{2.23}$$

Comme conséquences de l'inégalité de Sobolev $(\mathcal{S}_n)$, on a des estimées d'ultracontractivité du semi-groupe de la chaleur sur M (cf [56], Théorème 4.1.1) :

$$||e^{-t\Delta}||_{p,q} \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2p}\left(1-\frac{p}{q}\right)}},\ \forall t > 0 \tag{2.24}$$

Par la domination de (2.21), on a donc aussi des estimées d'ultracontracitivité pour e^{-tH} :

Corollaire 2.5.4

$$||e^{-tH}||_{p,q} \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2p}\left(1-\frac{p}{q}\right)}},\ \forall t > 0 \tag{2.25}$$

Nous aurons besoin de deux autres conséquences de l'inégalité de Sobolev. La première est l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg :

Théorème 2.5.2 *Soient $1 \leq p \leq q < \infty$, et $\alpha > 0$. Soit e^{-tH} un semi-groupe analytique borné sur L^p, tel que l'on ait l'estimée d'ultracontractivité :*

$$||e^{-tH}||_{p,\infty} \leq Ct^{\frac{n}{2p}},\ \forall t > 0,$$

*et que $\alpha p > n$. Alors il existe une constante C telle que pour tout $\omega \in L^q \cap \mathcal{D}(H^{\alpha/2})$, on ait l'inégalité suivante, dite **inégalité de Gagliardo-Nirenberg** :*

$$||\omega||_\infty \leq C||\omega||_q^{1-\theta}||H^{\alpha/2}\omega||_p^\theta, \tag{2.26}$$

où $\theta = \frac{n}{2q}\frac{1}{1-\frac{n}{\alpha}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$. En particulier, pour $\alpha = 2$, on a l'inégalité suivante :

$$||\omega||_\infty \leq C||\omega||_{s/2}^{1-\theta}||H\omega||_{r/2}^\theta, \tag{2.27}$$

où $n < r \leq s$ et $\theta = \frac{n/s}{1-(n/r)+(n/s)}$.

Preuve :

Nous reproduisons la preuve de Coulhon dans [14]. On suppose pour simplifier $0 < \alpha < 2$. On écrit $\omega = e^{-tH}\omega + \int_0^t He^{-sH}\omega ds$. On a donc

$$||\omega||_\infty \leq ||e^{-tH}\omega||_\infty + \int_0^t ||He^{-sH}\omega||_\infty ds.$$

Puisque par hypothèse $||e^{-sH}||_{p,\infty} \leq Cs^{-\frac{n}{2q}}$, on a $||e^{-sH}\omega||_\infty \leq Cs^{-\frac{n}{2q}}||\omega||_p$. Pour l'intégrale, on écrit :

$$\int_0^t ||He^{-sH}\omega||_\infty ds \leq \left(\int_0^t ||H^{1-\alpha/2}e^{-sH}||_{p,\infty} dt\right) ||H^{\alpha/2}\omega||_p.$$

Puis

$$\int_0^t ||H^{1-\alpha/2}e^{-sH}||_{p,\infty} dt \leq \int_0^t ||e^{-\frac{s}{2}H}||_{p,\infty}||H^{1-\alpha/2}e^{-\frac{s}{2}H}||_{p,p} ds.$$

Par analyticité de e^{-tH} sur L^p, $||H^{1-\alpha/2}e^{-\frac{s}{2}H}||_{p,p} \leq Cs^{-1+\alpha/2}$, et on a de plus $||e^{-\frac{s}{2}H}||_{p,\infty} \leq Cs^{-\frac{n}{2p}}$, de sorte qu'en intégrant par rapport à s on trouve finalement :

$$||\omega||_\infty \leq C(t^{-\frac{n}{2q}}||\omega||_q + t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{n}{2p}}||H^{\alpha/2}\omega||_p).$$

On choisit t pour que les deux termes de la somme soient égaux. Cela revient à

$$\frac{||\omega||_q}{||H^{\alpha/2}\omega||_p} = t^{\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{n}{\alpha}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}.$$

Pour le t ainsi choisi, il existe un certain réel θ tel qu'on ait $\left(\frac{||\omega||_q}{||H^{\alpha/2}\omega||_p}\right)^{-\theta} = t^{-\frac{n}{2q}}$. On trouve

$$\theta = \frac{n}{2q}\frac{1}{1-\frac{n}{\alpha}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

□

L'autre résultat dont nous nous servirons est le suivant :

Proposition 2.5.3 *Pour tout $\alpha > 0$, et tous $p < q < \infty$ tels que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ (ce qui implique que $p < \frac{n}{\alpha}$),*

$$H^{-\alpha/2} : L^p(E) \to L^q(E)$$

est borné.

Preuve :

On sait que la propriété correspondante est vraie pour Δ par [60], Théorème 1 et [22], Théorème II.4.1, et on applique la domination (2.22).

□

De plus, on a le fait suivant, immédiat mais qui se révèlera très important par la suite :

Proposition 2.5.4 *Tous les résultat de cette section sont encore vrais si l'on remplace H par $H+\lambda$, pour tout réel λ positif (puisqu'il est évident que Δ domine $H+\lambda$), et de plus les constantes dans l'inégalité de Sobolev* (2.23) *et l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg* (2.26)*, ainsi que la norme des opérateurs $(H+\lambda)^{-\alpha} : L^p \to L^q$ sont bornées* ***indépendamment*** *de $\lambda \geq 0$.*

Forte positivité On considère à présent un opérateur L agissant sur les sections de E. On dira que L est **de type Schrödinger**, ou **opérateur de Schrödinger généralisé**, si L est du type :

$$L = \nabla^\star \nabla + \mathcal{R},$$

$\mathcal{R}$ étant un champ d'endomorphismes symétriques, c'est-à-dire qu'en tout point x de M, $\mathcal{R}(x)$ est un endomorphisme symétrique de la fibre E_x de E en x. Comme précédemment, on pose $H := \bar{\Delta} + \mathcal{R}_+$. Nous supposerons –comme c'est le cas pour le Laplacien de Hodge agissant sur les formes différentielles– que L est un opérateur *positif* :

Hypothèse 1 *L est un opérateur positif.*

De façon équivalente, si $\omega \in C_0^\infty(E)$,

$$0 \leq \langle \mathcal{R}_- \omega, \omega \rangle \leq \langle H\omega, \omega \rangle.$$

Rappelons la définition classique suivante :

Définition 2.5.1 *L'espace de Hilbert H_0^1 est la clôture de $C_0^\infty(E)$ pour la norme associée à la forme quadratique de l'opérateur auto-adjoint positif (de noyau L^2 nul) H.*

Enonçons quelques propriétés bien connues de H_0^1 associé à H :

Proposition 2.5.5
1. *$H_0^1 \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(E)$. En particulier, c'est un espace de sections de $E \to M$.*
2. *$H^{1/2}$, défini sur $C_0^\infty(E)$, s'étend de manière unique en une isométrie bijective $H_a^{1/2}$ de H_0^1 dans $L^2(E)$.*
   Nous pouvons donc considérer $H^{-1/2} : L^2(E) \to H_0^1$.
3. *Soit $H^{1/2}$ l'opérateur donné par le Théorème Spectral –notons-le $H_s^{1/2}$ pour éviter de le confondre avec l'opérateur que nous venons de définir de H_0^1 dans L^2– alors $\mathcal{D}(H_s^{1/2}) = H_0^1 \cap L^2(E)$, et de plus $H_s^{1/2}$ coïncide avec $H_a^{1/2}$ sur $H_0^1 \cap L^2(E)$.*

Esquisse de la preuve de la Proposition 2.5.5 :
(1) est une conséquence de l'inégalité de Sobolev (2.23). L'inégalité de Sobolev implique que H est non-parabolique, et (2) peut s'obtenir par la même méthode que celle développée dans la première partie de cette thèse. (3) peut aussir s'obtenir par les techniques développées dans la première partie de cette thèse dans le cadre des opérateurs de Schrödinger agissant sur les fonctions, qui s'adaptent de façon immédiate au cadre des opérateurs de Schrödinger agissant sur les sections d'un fibré Riemannien.

□

On commettra l'abus de notation consistant à écrire $H^{1/2} = H_a^{1/2} = H_s^{1/2}$.
Dans la suite, on suppose que $\mathcal{R}_- \in L^{\frac{n}{2}}$.

Définition 2.5.2 *On dit que L est **fortement positif** si l'une des conditions équivalentes –au moins lorsque $\mathcal{R}_- \in L^{\frac{n}{2}}$– suivantes est satisfaite :*

1. *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$0 \leq \langle \mathcal{R}_- \omega, \omega \rangle \leq (1-\varepsilon)\langle H\omega, \omega \rangle, \forall \omega \in C_0^\infty(E).$$

2.

$$Ker_{H_0^1}(L) = \{0\}.$$

3. *L'opérateur (positif, auto-adjoint compact si* $\mathcal{R}_- \in L^{\frac{n}{2}}$*)* $A := H^{-1/2}\mathcal{R}_- H^{-1/2}$ *agissant sur* $L^2(E)$ *vérifie :*

$$||A||_{2,2} \leq (1-\varepsilon),$$

où ε *est un réel strictement positif.*

Remarque 2.5.1 *Dans le cas général, 1) et 3) sont équivalents, et on a l'implication 3)⇒2), dès que* A *est auto-adjoint (c'est le cas si* $\mathcal{R}_- \in L^{\frac{n}{2}}$*, mais cela peut être vrai sous des hypothèses plus générales). L'implication 2)⇒3), quant à elle, est vraie dès que* A *est auto-adjoint compact.*

Preuve :

On peut écrire :

$$L = H - \mathcal{R}_- = H^{1/2}(I-A)H^{1/2}.$$

Montrons tout d'abord que 1) $\Leftrightarrow$ $3')$, où $3')$ est l'inégalité :

$$3') : \langle Au, u\rangle \leq (1-\varepsilon)\langle u, u\rangle, \forall u \in L^2.$$

Remarquons que $3')$ est équivalent à 3) lorsque A est auto-adjoint. Soit $\omega \in C_0^\infty(E)$, et posons $u = H^{1/2}\omega \in L^2(E)$. Alors

$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle \leq (1-\varepsilon)\langle u, u\rangle &\iff \langle H^{-1/2}\mathcal{R}_-\omega, H^{1/2}\omega\rangle \leq (1-\varepsilon)\langle H^{1/2}\omega, H^{1/2}\omega\rangle \\ &\iff \langle \mathcal{R}_-\omega, \omega\rangle \leq (1-\varepsilon)\langle H\omega, \omega\rangle\end{aligned}$$

Montrons à présent que 3) $\Rightarrow$ 2). C'est une conséquence du Lemme suivant :

Lemme 2.5.1 *Si* A *est auto-adjoint, alors*

$$H^{1/2} : Ker_{H_0^1}(L) \to Ker_{L^2}(I-A)$$

est un isomorphisme (et c'est bien sûr une isométrie).

Preuve :

Soit $u \in H_0^1$, alors $H^{1/2}u \in L^2(E)$. Par définition, $Lu = 0$ signifie que pour tout $v \in C_0^\infty(E)$,

$$\langle u, Lv\rangle = 0.$$

Cette égalité a un sens, car étant donné que H satisfait une inégalité de Sobolev (2.23), $H_0^1 \hookrightarrow L^1_{loc}$. Le Théorème Spectral implique, puisque $C_0^\infty \subset \mathcal{D}(H)$, qu'étant donnée une fonction $v \in C_0^\infty(E)$, on ait l'égalité suivante dans $L^2(E)$:

$$Hv = H^{1/2}H^{1/2}v.$$

D'où

$$Lv = (H - \mathcal{R}_-)v = H^{1/2}(I-A)H^{1/2}v.$$

Soit $w := (I-A)H^{1/2}v$; alors l'égalité précédente montre que $w = H^{-1/2}Lv \in \mathcal{D}(H^{1/2}) = H_0^1 \cap L^2(E)$. De plus, $H^{1/2}w = Lv$ est à support compact, et on a donc

$$\langle u, H^{1/2}w\rangle = \langle H^{1/2}u, w\rangle.$$

En effet, si $u \in H_0^1 \cap L^2$ c'est une conséquence du Lemme 1.3.1, et un argument de densité ainsi que le fait que $H_0^1 \hookrightarrow L^2_{loc}$ permettent de conclure que c'est vrai pour tout $u \in H_0^1$. Ainsi,

$$Lu = 0 \Longleftrightarrow \forall v \in C_0^\infty,\ \langle H^{1/2}u, (I-A)H^{1/2}v\rangle = 0.$$

Mais comme $H^{1/2}\left(C_0^\infty(E)\right)$ est dense dans $L^2(E)$, on obtient, en utilisant le fait que A est auto-adjoint :

$$\begin{aligned} Lu = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall v \in L^2,\ \langle H^{1/2}u, (I-A)v\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad H^{1/2}u \in Ker_{L^2}(I-A) \end{aligned}$$

□

Il reste à montrer 2) ⇒ 3) ; c'est une conséquence du Lemme 2.5.1 et du Lemme suivant, qui provient de la Proposition 1.2 dans [11] :

Lemme 2.5.2 *Supposons que $\mathcal{R}_- \in L^{\frac{n}{2}}$. Alors $A := H^{-1/2}\mathcal{R}_- H^{-1/2}$ est un opérateur positif, auto-adjoint et compact sur $L^2(E)$. De plus,*

$$||A||_{2,2} \leq C||\mathcal{R}_-||_{\frac{n}{2}},$$

où C dépends seulement de la constante dans l'inégalité de Sobolev pour H (2.23).

□

Nous aurons aussi besoin du Lemme suivant, qui est une conséquence facile de la définition de la forte positivité :

Lemme 2.5.3 *Soit L un opérateur de type Schrödinger :*

$$L = \bar{\Delta} + \mathcal{R},$$

qui soit fortement positif. Alors on a une inégalité de Sobolev pour L :

$$||\omega||^2_{\frac{2n}{n-2}} \leq C\langle L\omega, \omega\rangle,\ \forall \omega \in C_0^\infty(E). \tag{2.28}$$

Preuve :

Par définition de la forte positivité,

$$\langle \mathcal{R}_-\omega, \omega\rangle \leq (1-\varepsilon)\langle H\omega, \omega\rangle.$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle L\omega, \omega\rangle &= \langle H\omega, \omega\rangle - \langle \mathcal{R}_-\omega, \omega\rangle \\ &\geq (1-(1-\varepsilon))\langle H\omega, \omega\rangle \\ &\geq \varepsilon C||\omega||^2_{\frac{2n}{n-2}}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé pour la dernière inégalité le fait que H satisfait l'inégalité de Sobolev (2.23).

□

2.5.2 Estimée de la résolvante de l'opérateur de Schrödinger

Dans cette partie, nous allons montrer comment obtenir des estimées sur la résolvante de $L := \nabla^*\nabla + \mathcal{R}_+ - \mathcal{R}_- = H - \mathcal{R}_-$. Pour ce faire, nous devons tout d'abord estimer la résolvante de l'opérateur $H = \bar{\Delta} + \mathcal{R}_+$. Rappelons que d'après le Corollaire 2.5.2, e^{-tH} est un semi-groupe de contractions sur L^p, pour tout $1 \leq p \leq \infty$. En se servant de la formule :

$$(L+\lambda)^{-1} = \int_0^\infty e^{-tL}e^{-t\lambda}dt,$$

on obtient :

Proposition 2.5.6 *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne complète. Alors pour tout $\lambda >$ 0 et pour tout $1 \leq p \leq \infty$,*

$$||(H+\lambda)^{-1}||_{p,p} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Remarque 2.5.2 *Le cas $p = \infty$ se traite par dualité, puisque $(H+\lambda)^{-1}$ est défini sur L^∞ par dualité. En fait, pour $g \in L^\infty$, on peut définir $(H+\lambda)^{-1}g$ de sorte que*

$$\langle (H+\lambda)^{-1}g, f\rangle := \langle g, (H+\lambda)^{-1}f\rangle, \forall f \in L^1$$

(rappelons que $(L^1)' = L^\infty$). Il est facile de voir que $||(H+\lambda)^{-1}||_{1,1} \leq \frac{1}{\lambda}$ implique $||(H+\lambda)^{-1}||_{\infty,\infty} \leq \frac{1}{\lambda}$.

Nous estimons maintenant la résolvante de l'opérateur $L := \nabla^*\nabla + \mathcal{R}_+ - \mathcal{R}_-$; comme précédemment, L agit sur les sections d'un fibré Riemannien $E \to M$ (voir le début des Préliminaires pour le cadre général). Le résultat-clé est le suivant :

Théorème 2.5.3 *Soit (M, g) une variété Riemannienne complète qui satisfait l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, et supposons que $\mathcal{R}_-$ soit dans $L^{\frac{n}{2}\pm\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Supposons aussi que $L := H - \mathcal{R}_-$, agissant sur les sections de $E \to M$, soit fortement positif. Alors pour tout $1 \leq p \leq \infty$, il existe une constante $C(p)$ telle que*

$$||(L+\lambda)^{-1}||_{p,p} \leq \frac{C(p)}{\lambda}, \forall \lambda > 0.$$

Preuve :

Dans cette preuve, nous écrirons L^q pour $L^q(E)$. Posons $H_\lambda := H + \lambda$. Alors

$$(L+\lambda)^{-1} = (I - T_\lambda)^{-1}H_\lambda^{-1},$$

où $T_\lambda := H_\lambda^{-1}\mathcal{R}_-$. Si nous arrivons à montrer que $(I - T_\lambda)^{-1}$ est un opérateur borné sur L^p, avec une norme majorée par une constante indépendante de λ, alors nous déduirons le résultat en appliquant la Proposition 2.5.6. Pour ce faire, on va montrer que la série $\sum_{n\geq 0} T_\lambda^n$ converge dans $\mathcal{L}(L^p, L^p)$, uniformément par rapport à $\lambda \geq 0$.
Le but des deux Lemmes suivants est de montrer que T_λ agit sur tous les espaces L^q en étant borné. Nous traitons à part le cas $q = \infty$, car l'ingrédient de la preuve est différent des autres cas :

Lemme 2.5.4 *$T_\lambda : L^\infty \longrightarrow L^\infty$ est borné, uniformément par rapport à $\lambda \geq 0$.*

Preuve :

On a vu que e^{-tH_λ} satisfait les inégalités de Gagliardo-Nirenberg (2.27), ainsi que la Proposition 2.5.3, avec des constantes indépendantes de $\lambda \geq 0$. Soit $u \in L^\infty$. On applique les inégalité de Gagliardo-Nirenberg à H_λ : pour tout $p \geq \frac{n}{2} + \varepsilon$, il existe $0 < \theta < 1$ et C tels que

$$||T_\lambda u||_\infty \leq C||\mathcal{R}_- u||_{n/2+\varepsilon}^\theta ||T_\lambda u||_p^{1-\theta},$$

avec C indépendant de λ (voir la Proposition 2.5.4). Par la Propriété 2.5.3, $H_\lambda^{-1} : L^{\frac{n}{2}-\varepsilon} \to L^s$ pour un certain s, est borné uniformément par rapport à λ (et si ε est assez petit, on a bien $s \geq \frac{n}{2} + \varepsilon$). Puisque $||\mathcal{R}_- u||_{\frac{n}{2}+\varepsilon} \leq ||\mathcal{R}_-||_{\frac{n}{2}+\varepsilon} ||u||_\infty$, nous obtenons donc :

$$||T_\lambda u||_\infty \leq C||\mathcal{R}_-||_{n/2+\varepsilon}^\theta (||H_\lambda^{-1}||_{n/2-\varepsilon,s} ||\mathcal{R}_-||_{n/2-\varepsilon})^{1-\theta} ||u||_\infty \leq C||u||_\infty$$

$\square$

Lemme 2.5.5 *1. Pour tout $1 \leq \beta \leq \infty$,*

$$\mathcal{R}_- : L^\beta \to L^{\frac{n\beta}{n+2\beta}}$$

est borné.

2. Il existe $\nu > 0$ (petit et indépendant de $\lambda \geq 0$), tel que pour tout $\beta < \infty$, et tout $\lambda \geq 0$,

$$T_\lambda : L^\beta \to L^r \cap L^s,$$

où $\frac{1}{r} = \max(\frac{1}{\beta} - \nu, 0^+)$ et $\frac{1}{s} = \min(\frac{1}{\beta} + \nu, 1)$, est borné uniformément par rapport à λ (ici 0^+ veut dire n'importe quel réel strictement positif).

3. Pour $\beta = \infty$ et p assez grand,

$$T_\lambda : L^\infty \to L^\infty \cap L^p$$

est borné uniformément par rapport à λ.

4. Pour β assez grand,

$$T_\lambda : L^\beta \to L^\beta \cap L^\infty$$

est borné uniformément par rapport à λ.

Preuve :

Si $u \in L^\beta$ et $v \in L^\gamma$, alors

$$||uv||_{\frac{\gamma\beta}{\gamma+\beta}} \leq ||u||_\beta ||v||_\gamma.$$

Donc, $\mathcal{R}_- : L^\beta \to L^q$ est borné, où $\frac{1}{q} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{p}$, pour tout $p \in [\frac{n}{2} - \varepsilon, \frac{n}{2} + \varepsilon]$. En prenant $p = \frac{n}{2}$, on trouve le premier résultat du Lemme.
Appliquant la Proposition 2.5.3, on trouve que

$$H_\lambda^{-1}\mathcal{R}_- : L^\beta \to L^r \cap L^s$$

est borné indépendamment de β, et aussi uniformément par rapport à $\lambda \geq 0$ par la Proposition 2.5.4, où

$$\frac{1}{r} = \max\left(\left(\frac{2}{n+2\varepsilon} - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{\beta}, 0^+\right) = \max\left(\frac{1}{\beta} - \mu, 0^+\right),$$

et

$$\frac{1}{s} = \min\left(\left(\frac{2}{n-2\varepsilon} - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{\beta}, 1\right) = \min\left(\frac{1}{\beta} + \mu', 1\right),$$

d'où la seconde partie du Lemme avec $\nu = \min(\mu, \mu')$.

Pour le cas $\beta = \infty$, on a $s = \frac{1}{\mu'} = p$ grand, et on sait déjà d'après le Lemme 2.5.4 que T_λ envoie L^∞ dans L^∞.

Pour le cas β assez grand : puisque $\mathcal{R}_- \in L^{\frac{n}{2}+\epsilon}$, si β est assez grand et $u \in L^\beta$, alors $\mathcal{R}_- u \in L^{\frac{n}{2}+\alpha}$ pour un $\alpha > 0$. On peut appliquer les inégalités de Gagliardo-Nirenberg : pour un tel β,

$$||H_\lambda^{-1}\mathcal{R}_- u||_\infty \leq C||\mathcal{R}_- u||_{n/2+\alpha}^\theta ||T_\lambda u||_\beta^{1-\theta}.$$

En utilisant que $T_\lambda : L^\beta \to L^\beta$ est borné uniformément par rapport à λ, ceci implique le résultat.

$\square$

Comme Corollaire du Lemme 2.5.5, on obtient :

Proposition 2.5.7 *Pour tout $1 \leq \beta \leq \infty$ et $1 \leq \alpha \leq \infty$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ (qui ne dépend que de β et α, et pas de λ), tel que, pour tout $\lambda \geq 0$,*

$$T_\lambda^N : L^\alpha \to L^\beta$$

soit borné, uniformément par rapport à λ.

Par conséquent, si nous réussissons à prouver que pour un certain $\beta \in [1, \infty]$ et un certain $\mu \in (0, 1)$,

$$||T_\lambda^k||_{\beta,\beta} \leq C(1-\mu)^k,\ k \in \mathbb{N},$$

avec C indépendante de $\lambda \geq 0$, on obtiendra que la série $\sum_{k\geq 0} T_\lambda^k$ converge dans $\mathcal{L}(L^p, L^p)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$, uniformément par rapport à $\lambda \geq 0$. En effet, pour p fixé, on peut d'après la Proposition 2.5.7 trouver N tel que

$$T_\lambda : L^\beta \to L^p,$$

et tel que

$$T_\lambda : L^p \to L^\beta.$$

Alors pour $k \geq 2N$, on décompose T_λ^k en

$$T_\lambda^k = T_\lambda^N T_\lambda^{k-2N} T_\lambda^N,$$

où le T_λ^N de droite va de L^p dans L^β, celui de gauche de L^β dans L^p, et où T_λ^{k-2N} agit sur L^β. Donc

$$||T_\lambda^k||_{\beta,\beta} \leq C(1-\mu)^k,\ k \in \mathbb{N}$$

entraînerait que

$$||T_\lambda^k||_{p,p} \leq C(1-\mu)^{k-2N},\ k \geq 2N,$$

puis que la série $\sum_{k\geq 0} T_\lambda^k$ converge dans $\mathcal{L}(L^p, L^p)$, uniformément par rapport à $\lambda \geq 0$. Il nous reste donc à trouver β et $\mu \in (0,1)$ tels que

$$||T_\lambda^k||_{\beta,\beta} \leq C(1-\mu)^k,\ k \in \mathbb{N},$$

avec C indépendante de $\lambda \geq 0$. C'est l'objet du Lemme suivant :

Lemme 2.5.6 *Soit* $\beta := \frac{2n}{n-2}$. *Alors* $||T_\lambda^k||_{\beta,\beta} \leq C(1-\mu)^k$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *avec des constantes* C *et* $0 < \mu < 1$ *indépendantes de* $\lambda \geq 0$.

Preuve :

On écrit :

$$T_\lambda = H_\lambda^{-1/2}\left[H_\lambda^{-1/2}\mathcal{R}_- H_\lambda^{-1/2}\right]H_\lambda^{1/2},$$

et on pose $A_\lambda := H_\lambda^{-1/2}\mathcal{R}_- H_\lambda^{-1/2}$. Définissons l'espace de Hilbert $H_{0,\lambda}^1$ comme la clôture de $C_0^\infty(E)$ pour la norme :

$$\omega \mapsto \left(\int_M |\nabla\omega|^2 + \lambda|\omega|^2\right)^{1/2} = Q_\lambda(\omega)^{1/2},$$

où Q_λ est la forme quadratique associée à l'opérateur auto-adjoint H_λ. Si $\lambda > 0$, c'est l'espace $H_0^1 \cap L^2 = \mathcal{D}(H^{1/2})$, mais avec une norme différente. Le choix de la norme est fait pour que $H_\lambda^{1/2} : H_{0,\lambda}^1 \to L^2$ soit une isométrie. Puisque $A_\lambda : L^2 \to L^2$, et étant donné que $T_\lambda = H_\lambda^{-1/2} A_\lambda H_\lambda^{1/2}$, on en déduit que :

$$T_\lambda : H_{0,\lambda}^1 \to H_{0,\lambda}^1 \text{ avec } ||T_\lambda||_{H_{0,\lambda}^1, H_{0,\lambda}^1} = ||A_\lambda||_{2,2}.$$

Mais d'après l'équivalence 1) $\Leftrightarrow$ 3) dans la Définition 2.5.2, l'existence de $\mu \in (0,1)$ tel que $||A_\lambda||_{2,2} \leq 1-\mu$ est équivalente à ce que :

$$\langle \mathcal{R}_-\omega, \omega\rangle \leq (1-\mu)\langle H_\lambda\omega, \omega\rangle,\ \forall \omega \in C_0^\infty(E).$$

Puisque $\langle (H+\lambda)\omega, \omega\rangle = \langle H\omega, \omega\rangle + \lambda||\omega||_2^2 \geq \langle H\omega, \omega\rangle$, on obtient que l'existence d'un $\mu \in (0,1)$ tel que

$$||A_\lambda||_{2,2} \leq 1-\mu,\ \forall \lambda \geq 0,$$

est équivalente à la forte positivité de L. Donc $||T_\lambda||_{H_{0,\lambda}^1, H_{0,\lambda}^1} \leq (1-\mu)$. De plus, la Proposition 2.5.3 nous dit que

$$H_\lambda^{-1/2} : L^{\frac{2n}{n+2}} \to L^2,$$

avec une norme bornée indépendamment de $\lambda \geq 0$ par la Propriété 2.5.4. Le Lemme 2.5.5 implique que

$$\mathcal{R}_- : L^{\frac{2n}{n-2}} \to L^{\frac{2n}{n+2}},$$

donc, utilisant que $H_\lambda^{-1/2} : L^2 \to H_{0,\lambda}^1$ est une isométrie et que l'on peut écrire $T_\lambda = H_\lambda^{-1/2}\left[H_\lambda^{-1/2}\mathcal{R}_-\right]$, on obtient que

$$T_\lambda : L^\beta \to H^1_{0,\lambda},$$

a une norme bornée indépendamment de $\lambda \geq 0$. De plus, $H^1_{0,\lambda} \hookrightarrow H^1_0$ est continue de norme inférieure à 1, et l'inégalité de Sobolev pour H (2.23) nous dit précisément que :

$$H^1_0 \hookrightarrow L^\beta$$

continûment. Donc $H^1_{0,\lambda} \hookrightarrow L^\beta$ a une norme bornée indépendemment de λ. Nous écrivons ensuite $T^k_\lambda = T^{k-1}_\lambda T_\lambda$, avec

$$T_\lambda : L^\beta \to H^1_{0,\lambda}$$

et

$$T^{k-1}_\lambda : H^1_{0,\lambda} \to H^1_{0,\lambda} \hookrightarrow L^\beta,$$

de sorte qu'on obtient :

$$||T^k_\lambda||_{\beta,\beta} \leq C(1-\mu)^k.$$

□

Comme corollaire de la preuve (plus précisément de la Proposition 2.5.7 et du Lemme 2.5.6), on obtient :

Corollaire 2.5.5

$$(L+\lambda)^{-1} = (I-T_\lambda)^{-1} H_\lambda^{-1},$$

où $(I-T_\lambda)^{-1} : L^p(E) \to L^p(E)$ *a une norme bornée indépendamment de* λ*, pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.

On pourrait espérer déduire du Théorème 2.5.3 que e^{-tL} est uniformément borné sur tous les espaces L^p, par un argument semblable au Théorème de Hille-Yosida. En particulier, le Théorème de Hille-Yosida-Phillips nous dit que la majoration

$$||(L+\lambda)^{-k}||_{p,p} \leq \frac{C}{\lambda^k},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

avec C indépendante de λ et de k, est nécessaire et suffisante pour que e^{-tL} soit uniformément borné sur L^p. Le problème ici est que si l'on applique directement le Théorème 2.5.3 on obtient :

$$||(L+\lambda)^{-k}||_{p,p} \leq \frac{C^k}{\lambda^k},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire que la constante qui apparaît n'est pas indépendante de k. En fait, si l'on utilise la méthode du Théorème 2.5.3 d'une façon moins naïve, on peut obtenir :

$$||(L+\lambda)^{-k}||_{p,p} \leq \frac{Ck}{\lambda^k},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire que la croissance de la constante est linéaire en k, et non par exponentielle. Cependant, ce n'est toujours pas suffisant.

On va utiliser une idée de A. Sikora [57] pour résoudre ce problème : il est montré dans [57] qu'une estimée Gaussienne pour e^{-tL} peut s'obtenir à partir d'estimées diagonales convenables. Par conséquent, notre objectif est d'obtenir des estimées diagonales pour e^{-tL}, c'est-à-dire des estimées de $||e^{-tL}||_{2,\infty}$, et pour ce faire, suivant une idée développée dans l'article de Sikora – et qui remonte en fait aux articles de P. Auscher [4] et P. Auscher, A. McIntosh et P. Tchamitchian [6], on peut essayer d'estimer $||(L+\lambda)^{-k}||_{2,\infty}$. L'avantage de cette approche est que la borne nécessaire sur $||(L+\lambda)^{-k}||_{2,\infty}$ ne doit plus nécessairement être indépendante de k, donc les estimées de la résolvante obtenues dans le Théorème 2.5.3 devraient pouvoir suffire à prouver ces estimées diagonales ! Nous développons cette approche dans la partie suivante.

Remarque 2.5.3 *Bien sûr, si nous réussissons à la fin à montrer les estimées Gaussiennes pour e^{-tL}, e^{-tL} sera uniformément borné sur tous les espaces L^p.*

2.5.3 Estimée diagonale du noyau de la chaleur

La Proposition suivante est une légère généralisation des idées de Sikora :

Proposition 2.5.8 *Soit X un espace métrique mesuré. Soit L un opérateur auto-adjoint positif, non borné sur $L^2(X)$, et soit $1 < p < \infty$. Supposons que le semi-groupe e^{-tL} soit analytique borné sur $L^p(X)$ (c'est nécessairement le cas si $p = 2$). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une constante C telle que pour tout $t > 0$,*

$$||e^{-tL}||_{p,\infty} \leq \frac{C}{t^{n/2p}}.$$

2. *Pour un (pour tout) $\alpha > n/2p$, il existe une constante $C(p,\alpha)$ telle que*

$$||(L+\lambda)^{-\alpha}||_{p,\infty} \leq C(p,\alpha)\lambda^{-\alpha+n/2p},\ \forall\lambda > 0.$$

Preuve :

Tout d'abord, remarquons que

$$||(L+\lambda)^{-\alpha}||_{p,\infty} \leq C(p,\alpha)\lambda^{-\alpha+n/2p},\ \forall\lambda > 0$$

peut se réécrire

$$||(I+tL)^{-\alpha}||_{p,\infty} \leq C(p,\alpha)t^{-n/2p},\ \forall t > 0.$$

2) $\Rightarrow$ 1) : puisque e^{-tL} est analytique borné sur L^p, par la Proposition 2.5.3 il existe une constante C telle que :

$$||(I+tL)^{\alpha}e^{-tL}||_{p,p} \leq C,\ \forall t > 0.$$

On écrit alors $e^{-tL} = (I+tL)^{-\alpha}\big((I+tL)^{\alpha}e^{-tL}\big)$ afin d'obtenir le résultat.

1) $\Rightarrow$ 2) : on a

$$(L+\lambda)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tL}t^{\alpha-1}dt,$$

de sorte que

$$||(L+\lambda)^{-\alpha}||_{p,\infty} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-\lambda t}||e^{-tL}||_{p,\infty}t^{\alpha-1}dt.$$

En se servant de l'hypothèse, on obtient :

$$||(L+\lambda)^{-\alpha}||_{p,\infty} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{\alpha-n/2p-1}dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{-\alpha+n/2p}\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-n/2p-1}du.$$

Puisque $\alpha - n/2p > 0$, l'intégrale $\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-n/2p-1}du$ converge, d'où le résultat.

□

Nous utiliserons l'équivalence dans les deux sens. Pour commencer, on applique ceci à H (qui, d'après le Corollaire 2.5.4, satisfait $||e^{-tH}||_{p,\infty} \leq \frac{C}{t^{n/2p}}$), afin d'obtenir :

Corollaire 2.5.6 *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et $\alpha > n/2p$, il existe une constante $C(p,\alpha)$ telle que*

$$||H_\lambda^{-\alpha}||_{p,\infty} \leq C(p,\alpha)\lambda^{-\alpha+n/2p},\ \forall \lambda > 0.$$

Nous allons à présent utiliser l'autre direction de l'équivalence de la Proposition 2.5.8 (i.e. une estimée de la résolvante implique une estimée sur le semi-groupe) pour prouver le résultat suivant, qui est le résultat principal de ce paragraphe :

Théorème 2.5.4 *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne complète qui satisfait l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, et supposons que $\mathcal{R}_-$ soit dans $L^{\frac{n}{2}\pm\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Supposons aussi que $L := H - \mathcal{R}_- = \nabla^*\nabla + \mathcal{R}_+ - \mathcal{R}_-$, agissant sur les sections d'un fibré Riemannien $E \to M$, soit fortement positif. Alors l'estimée diagonale suivante est valable : il existe une constante C telle que*

$$||e^{-tL}||_{2,\infty} \leq \frac{C}{t^{n/4}},\ \forall t > 0.$$

Preuve :

Dans cette preuve, on écrira L^q pour $L^q(E)$. D'après la Proposition 2.5.8, il suffit de prouver l'estimée :

$$||(L+\lambda)^{-N}||_{2,\infty} \leq \frac{C_N}{\lambda^{N-n/4}},\ \forall \lambda > 0, \tag{2.29}$$

pour un certain $N > n/4$. On utilise le fait que pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on a $(L+\lambda)^{-1} = (I-T_\lambda)^{-1}H_\lambda^{-1}$ sur L^p, où $(I-T_\lambda)^{-1}$ a une norme dans $\mathcal{L}(L^p, L^p)$ bornée indépendamment de $\lambda \geq 0$ (c.f. Corollaire 2.5.5). Soit $k = \lfloor n/4 \rfloor = \lfloor \frac{1}{2}/\frac{2}{n} \rfloor$. Nous allons montrer l'estimée 2.29 pour $N = k+1$.

Premier cas : $\frac{n}{4} \notin \mathbb{N}$

On veut montrer les estimées $||(L+\lambda)^{-k-1}||_{2,\infty} \leq \frac{C}{\lambda^{(k+1)-n/4}}$, $\forall \lambda > 0$. Définissons $p > \frac{n}{2}$ par :

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - k\frac{2}{n}.$$

D'après la Proposition 2.5.3,

$$H_\lambda^{-1} : L^r \longrightarrow L^s,\ \frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{2}{n},\ \forall r < \frac{n}{2},$$

avec une norme bornée indépendamment de λ. En utilisant le fait que $(I-T_\lambda)^{-1}$ a une norme dans $\mathcal{L}(L^q, L^q)$ bornée indépendamment de $\lambda \geq 0$, on obtient que

$$(L+\lambda)^{-k} : L^2 \longrightarrow L^p$$

est borné uniformément par rapport à $\lambda \geq 0$. Puisque $\frac{n}{2p} < 1$, on a d'après le Corollaire 2.5.6 :

$$H_\lambda^{-1} : L^p \longrightarrow L^\infty,$$

avec

$$||H_\lambda^{-1}||_{p,\infty} \leq C\lambda^{-1+\frac{n}{2p}},$$

et donc :

$$||(L+\lambda)^{-k-1}||_{2,\infty} \leq C(k)\lambda^{-1+\frac{n}{2p}} = \frac{C(k)}{\lambda^{k+1-n/4}}.$$

Second cas : $\frac{n}{4} \in \mathbb{N}$ donc $k = \frac{n}{4}$. On écrit $H_\lambda^{-1} = H_\lambda^{-\alpha} H_\lambda^{-1+\alpha}$, où $\alpha \in (0,1)$. Alors d'après la Proposition 2.5.6, $||H_\lambda^{-1+\alpha}||_{2,2} \leq \frac{1}{\lambda^{1-\alpha}}$, et

$$H_\lambda^{-\alpha} : L^2 \longrightarrow L^q,\ \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \alpha\frac{2}{n}$$

est borné avec une borne sur la norme indépendante de $\lambda > 0$. Cette fois-ci, on définit $p > \frac{n}{2}$ par

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - (k-1+\alpha)\frac{2}{n}.$$

On obtient

$$||(L+\lambda)^{-k}||_{2,p} \leq ||(L+\lambda)^{-(k-1)}||_{q,p}||(I-T_\lambda)^{-1}||_{q,q}||H_\lambda^{-\alpha}||_{2,q}||H_\lambda^{-(1-\alpha)}||_{2,2} \leq \frac{C}{\lambda^{1-\alpha}},$$

Ainsi, utilisant le fait que $||H_\lambda^{-1}||_{p,\infty} \leq C\lambda^{-1+\frac{n}{2p}}$ et que $||(I-T_\lambda)^{-1}||_{\infty,\infty} \leq C$ indépendamment de λ, on obtient :

$$||(L+\lambda)^{-k-1}||_{2,\infty} \leq \frac{C_k}{\lambda^{(1-n/2p)+(1-\alpha)}}.$$

Mais $\frac{n}{2p} = \frac{n}{4} - (k-1+\alpha)$, ce qui donne le résultat voulu.

□

2.5.4 Estimée hors diagonale du noyau de la chaleur

Rappelons la définition suivante :

Définition 2.5.3 *Soit X un espace métrique mesuré, E un fibré Riemannien sur X et L un opérateur auto-adjoint positif sur $L^2(E)$. On dit que L satisfait la propriété de* ***propagation à vitesse finie*** *si pour tout $t > 0$,*

$$supp\ K_{\cos(t\sqrt{L})} \subset \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) \leq t\},$$

où $K_{\cos(t\sqrt{L})}$ est une notation pour le noyau de $\cos(t\sqrt{L})$.

Une conséquence du travail de Sikora (Théorème 4 dans [57]) est :

Théorème 2.5.5 *Soit X un espace métrique mesuré dont la mesure est doublante, et E un fibré Riemannien sur X. Si l'on a l'estimée diagonale suivante :*

$$||e^{-tL}||_{2,\infty} \leq \frac{C}{t^{n/4}}, \; \forall t > 0,$$

avec L opérateur auto-adjoint positif sur $L^2(E)$ vérifiant la propriété de propagation à vitesse finie, alors on a une estimée de type Gaussienne pour e^{-tL} : pour tout $\delta > 0$, il existe une constante C telle que

$$||K_{\exp(-tL)}(x,y)|| \leq \frac{C}{t^{n/2}} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right), \; \forall x,y \in M, \; \forall t > 0,$$

où $K_{\exp(-tL)}$ est une notation pour le noyau de e^{-tL}.

Il est montré dans l'appendice de [46], p.388-389, le fait suivant :

Proposition 2.5.9 *Soit M une variété Riemannienne complète, E un fibré Riemannien sur M, et L un opérateur du type*

$$L := \nabla^{\star}\nabla + \mathcal{R},$$

tel que L soit auto-adjoint positif sur $L^2(E)$. Alors L vérifie la propriété de propagation à vitesse finie.

On a donc le résultat suivant, conséquence des Théorèmes 2.5.5 et 2.5.4 :

Théorème 2.5.6 *Soit M une variété Riemannienne complète satisfaisant l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, E un fibré Riemannien sur M, et L un opérateur du type*

$$L := \nabla^{\star}\nabla + \mathcal{R}_+ - \mathcal{R}_-,$$

tel que L soit auto-adjoint sur $L^2(E)$. On suppose que $\mathcal{R}_- \in L^{\frac{n}{2}\pm\varepsilon}$, pour un certain $\varepsilon > 0$, et que L est fortement positif. Alors pour tout $\delta > 0$, il existe une constante C telle que

$$||K_{\exp(-tL)}(x,y)|| \leq \frac{C}{t^{n/2}} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right), \; \forall x,y \in M, \; \forall t > 0,$$

L'estimée que nous obtenons n'est pas ce que l'on appelle habituellement une estimée Gaussienne sur $K_{exp(-tL)}$; en effet, une estimée Gaussienne sur $K_{exp(-tL)}$ est une majoration du type :

$$||K_{\exp(-tL)}(x,y)|| \leq \frac{C}{V(x,t^{1/2})} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right), \; \forall x,y \in M, \; \forall t > 0.$$

Le problème vient du terme $V(x,t^{1/2})$, qui peut très bien ne pas se comporter comme $t^{-n/2}$. En fait, lorsque M satisfait une inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, on a seulement la borne inférieure (montrée dans [9] et [1]) :

$$V(x,R) \geq CR^n, \; \forall R > 0, \forall x \in M,$$

ce qui implique en passant que $n \geq dim(M)$. Par exemple, le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_1$ est une variété de dimension 3 qui satisfait une inégalité de Sobolev de dimension 4 mais dont le volume des boules satisfait :

$$V(x,R) \approx R^3 \text{ si } R \leq 1,$$

et

$$V(x,R) \approx R^4 \text{ si } R \geq 1.$$

Définition 2.5.4 *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne complète, qui satisfait une inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$. On dit que la croissance du volume de M est* ***compatible avec la dimension de Sobolev*** *s'il existe une constante C telle que :*

$$V(x,R) \leq CR^n, \forall x \in M, \forall R \geq 1.$$

Définition 2.5.5 *On dit que M satisfait une* ***inégalité de Faber-Krahn relative*** *d'exposant n s'il existe une constante C telle que pour tout $x \in M$, tout $R > 0$, et tout ensemble non vide $\Omega \subset B(x,R)$,*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{C}{R^2}\left(\frac{|B(x,R)|}{|\Omega|}\right)^{2/n},$$

où $\lambda_1(\Omega)$ est la première valeur propre de Δ sur Ω pour les conditions au bord de Dirichlet.

Grigor'yan a montré dans [32] que l'inégalité de Faber-Krahn relative est équivalente au doublement du volume (D) et à l'estimée gaussienne supérieure du noyau de la chaleur (G). On a la propriété suivante (qui n'est pas originale) :

Proposition 2.5.10 *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne complète, qui satisfait l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, et dont la courbure de Ricci est bornée inférieurement. Si la croissance du volume de M est compatible avec la dimension de Sobolev, alors M satisfait une inégalité de Faber-Krahn relative d'exposant n.*

Preuve :

Expliquons d'abord pourquoi l'inégalité de Faber-Krahn relative est valable pour les boules de petit rayon. Saloff-Coste a montré dans [55] l'inégalité de Sobolev suivante : si la courbure de Ricci de M est minorée par $-K \leq 0$, alors pour toute boule B de M de rayon R,

$$||f||^2_{\frac{2n}{n-2}} \leq e^{C(1+\sqrt{K}R)}\frac{R^2}{V(R)^{2/n}}||df||_2 + e^{C(1+\sqrt{K}R)}\frac{1}{V(R)^{2/n}}||f||_2, \forall f \in C_0^\infty(B) \tag{2.30}$$

Pour les boules de rayon inférieur à 1, (2.30) se réécrit

$$||f||^2_{\frac{2n}{n-2}} \leq C\frac{R^2}{V(R)^{2/n}}||df||_2 + C\frac{1}{V(R)^{2/n}}||f||_2, \forall f \in C_0^\infty(B).$$

De plus, pour les boules de rayon inférieures à 1, on a l'inégalité suivante pour la première valeur propre du Laplacien avec condition au bord de Dirichlet, conséquence du Théorème de comparaison de Cheng :

$$\lambda_1(B) \leq CR^2,$$

et donc on obtient pour toute boule B de rayon R inférieur à 1,

$$||f||^2_{\frac{2n}{n-2}} \leq C\frac{R^2}{V(R)^{2/n}}||df||_2, \forall f \in C_0^\infty(B).$$

D'après les travaux de Carron [9], ceci est équivalent à l'inégalité de Faber-Krahn relative pour les boules de rayon inférieur à 1.

Pour les boules de rayon ≥ 1 : encore d'après [9], puisque M satisfait une inégalité de

Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, M satisfait une inégalité de Faber-Krahn d'exposant n, c'est-à-dire que pour tout ouvert $\Omega \subset M$,

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{C}{|\Omega|^{\frac{2}{n}}}.$$

Si $\Omega \subset B(x,R)$ avec $R \geq 1$, on a, en utilisant l'hypothèse que le volume des boules de rayon supérieur à 1 est euclidien de dimension n :

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{C}{|\Omega|^{\frac{2}{n}}} \geq \frac{C}{R^2}\left(\frac{|B(x,R)|}{|\Omega|}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

$\square$

Exemple 2.5.1 *Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_1$ satisfait une inégalité de Faber-Krahn relative d'exposant 4 ; en fait, il satisfait même les inégalités de Poincaré à l'échelle* (P) *et la propriété de doublement de la mesure* (D)*, ce qui est équivalent (d'après les travaux de Saloff-Coste [54]) à la conjonction des estimées Gaussiennes supérieures et inférieures du noyau de la chaleur* (L-Y).

Toute variété à courbure de Ricci positive (ou plus généralement, toute variété à courbure de Ricci positive en-dehors d'un compact, ayant un seul bout, et vérifiant une condition appelée (RCA), voir [36]), satisfait les inégalités de Poincaré à l'échelle (P) *et la propriété de doublement de la mesure* (D)*, et donc aussi une inégalité de Faber-Krahn relative d'exposant dim(M).*

En se rappelant le résultat du Théorème 2.5.4, on obtient l'un des résultats principaux de cette thèse :

Théorème 2.5.7 *Soit (M,g) une variété Riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, et E un fibré Riemannien sur M. Soit L un opérateur de type Schrödinger :*

$$L := \nabla^\star\nabla + \mathcal{R}_+ - \mathcal{R}_-,$$

agissant sur les sections de E. On suppose que $\mathcal{R}_-$ est dans $L^{\frac{n}{2}-\varepsilon} \cap L^\infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$, et que L est fortement positif. On suppose aussi que la croissance du volume de M est compatible avec la dimension de Sobolev. Alors l'estimée Gaussienne est valable pour e^{-tL} : pour tout $\delta > 0$, il existe une constante C telle que

$$||K_{\exp(-tL)}(x,y)|| \leq \frac{C}{V(x,t^{1/2})}\exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right),\ \forall x,y \in M,\ \forall t > 0.$$

Preuve :

D'après le Théorème 2.5.6,

$$||K_{\exp(-tL)}(x,y)|| \leq \frac{C}{V(x,t^{1/2})}\exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right),\ \forall x,y \in M,\ \forall t \geq 1.$$

Le fait que M satisfasse une inégalité de Faber-Krahn relative implique que :

$$p_t(x,y) \leq \frac{C}{V(x,t^{1/2})}\exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right),\ \forall x,y \in M,\ \forall t > 0.$$

Mais puisque $\mathcal{R}_-$ est borné inférieurement, ceci implique l'estimée Gaussienne pour e^{-tL} en temps petit :

$$||K_{\exp(-tL)}(x,y)|| \leq \frac{C}{V(x,t^{1/2})} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right),\ \forall x,y \in M,\ \forall t \leq 1.$$

En effet, cela vient de ce qu'on a la domination suivante (montrée dans [40]) :

$$||K_{\exp(-tL)}(x,y)|| \leq e^{-t(\Delta - C)}(x,y)$$

si $\mathcal{R}_- \leq C$.

□

On verra dans la Proposition 2.5.12 qu'en fait, sous les hypothèses du Théorème 2.5.7,

$$Ker_{L^2}(L) = Ker_{H_0^1}(L).$$

En utilisant ceci et la définition de forte positivité, on obtient :

Corollaire 2.5.7 *Soit (M,g) une variété Riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, et E un fibré Riemannien sur M. Soit L un opérateur de type Schrödinger :*

$$L := \nabla^\star \nabla + \mathcal{R}_+ - \mathcal{R}_-,$$

agissant sur les sections de E, tel que L soit auto-adjoint positif sur $L^2(E)$. On suppose que $\mathcal{R}_-$ est dans $L^{\frac{n}{2}-\varepsilon} \cap L^\infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$, que la croissance du volume de M est compatible avec la dimension de Sobolev, et que

$$Ker_{L^2}(L) = \{0\}.$$

Alors l'estimée Gaussienne est valable pour e^{-tL} : pour tout $\delta > 0$, il existe une constante C telle que

$$||K_{\exp(-tL)}(x,y)|| \leq \frac{C}{V(x,t^{1/2})} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right),\ \forall x,y \in M,\ \forall t > 0.$$

2.5.5 Applications

L'estimée Gaussienne pour le noyau de la chaleur sur les 1-formes a un certain nombre de conséquences, que nous décrivons à présent.

Estimées du gradient du noyau de la chaleur sur les fonctions et inégalités de Poincaré à l'échelle Tout d'abord, Coulhon et Duong (p. 1728-1751 de [18]) ont remarqué que l'estimée Gaussienne pour le noyau de la chaleur sur les 1-formes – en fait, une estimée Gaussienne pour le noyau de la chaleur agissant sur les formes exactes est suffisante – implique l'estimée suivante pour le gradient du noyau de la chaleur sur les fonctions :

$$|\nabla_x p_t(x,y)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}V(x,\sqrt{t})} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right),\ \forall t > 0,\ \forall x,y \in M,$$

ce qui, lorsqu'on a l'estimée diagonale inférieure pour le noyau de la chaleur sur les fonctions $p_t(x,x) \geq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})}$ et que la mesure est doublante, donne une estimée Gaussienne inférieure sur le noyau de la chaleur sur les fonctions :

$$p_t(x,y) \geq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right), \forall t>0, \forall x,y \in M.$$

Si de plus M satisfait l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, et si la croissance du volume de M est compatible avec la dimension de Sobolev, on sait d'après la Proposition 2.5.10 que M satisfait une inégalité de Faber-Krahn relative d'exposant n, et ceci implique d'après les travaux de Grigor'yan ([32]) qu'on a l'estimée Gaussienne supérieure pour le noyau de la chaleur sur les fonctions :

$$p_t(x,y) \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right), \forall t>0, \forall x,y \in M$$

Mais on sait d'après les travaux de Saloff-Coste ([54] que les estimées Gaussiennes inférieures et supérieures du noyau de la chaleur sur les fonctions sont équivalentes à la conjonction des inégalités de Poincaré à l'échelle (P) et du fait que la mesure soit doublante (D).
Nous avons donc prouvé le résultat suivant, qui vaut pour une classe plus générale de variétés que les variétés à courbure de Ricci positive :

Théorème 2.5.8 *Soit (M^m,g) une variété Riemannienne de dimension m, qui satisfait l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, et dont la partie négative de la courbure de Ricci est dans $L^{\frac{n}{2}-\varepsilon}\cap L^\infty$ pour un certain $\varepsilon>0$. On suppose que sur M il n'existe pas de forme harmonique L^2 non-nulle, et que la croissance du volume de M est compatible avec la dimension de Sobolev. Alors on a les estimées suivantes pour le noyau de la chaleur sur les fonctions : pour tout $\delta>0$, il existe c et C deux constantes strictement positives telles que*

$$|\nabla_x p_t(x,y)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}V(x,\sqrt{t})} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right), \forall t>0, \forall x,y \in M, \tag{2.31}$$

$$\frac{c}{V(x,\sqrt{t})} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right) \leq p_t(x,y) \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{(4+\delta)t}\right), \forall t>0, \forall x,y \in M, \tag{2.32}$$

et sur M les inégalités de Poincaré à l'échelle (P) *sont valables.*

Application à la transformée de Riesz Dans [57], Sikora montre que lorsqu'une estimée Gaussienne est valable pour un semi-groupe e^{-tH}, où H est un opérateur auto-adjoint, alors pour tout opérateur local A tel que $AL^{-\alpha}$ soit borné sur L^2, $\alpha>0$, $AL^{-\alpha}$ est aussi borné sur L^p pour tout $1<p\leq 2$. Etant donné cela, on obtient les résultats suivants, qui sont conséquences du Théorème 10 de [57] (ou du Théorème 5.5 de Coulhon et Duong [18]), et du Théorème 2.5.7 :

Corollaire 2.5.8 *Soit (M^m,g) une variété Riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev $(\mathcal{S}_n)$, et dont la partie négative de la courbure de Ricci est dans $L^{\frac{n}{2}-\varepsilon}\cap L^\infty$ pour un certain $\varepsilon>0$. On suppose qu'il n'y a pas de forme harmonique L^2 non-nulle sur M, et que la croissance du volume de M est compatible avec la dimension de Sobolev. Alors la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p pour tout $1<p<\infty$.*

Corollaire 2.5.9 *Soit (M^m,g) une variété Riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev $(\mathcal{S}_n)$, et dont la partie négative de la courbure de Ricci est dans $L^{\frac{n}{2}-\varepsilon}\cap L^\infty$ pour un certain $\varepsilon>0$. On suppose que la croissance du volume de M est compatible avec la dimension de Sobolev, et que V est un potentiel tel que $L:=\vec{\Delta}+V$ soit fortement positif. Alors $d^*\left(\vec{\Delta}+V\right)^{-1/2}$ est borné sur L^p pour $1<p\leq 2$.*

Application à la cohomologie L^p réduite On s'intéresse à la cohomologie L^p réduite des variétés que nous avons considérées. On rappelle le résultat suivant, tiré de [13] :

Proposition 2.5.11 *Soit $p \geq 2$. Soit M une variété Riemannienne complète non-compacte, vérifiant l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, et dont la croissance du volume est compatible avec la dimension de Sobolev. Supposons que la transformée de Riesz sur M soit bornée sur L^p. Alors $H^1_p(M)$, le premier espace de cohomologie L^p de M, a l'interprétation suivante :*

$$H^1_p(M) \simeq \{\omega \in L^p(\Lambda^1 T^\star M) : d\omega = d^\star\omega = 0\} \tag{2.33}$$

Et de plus, $\mathcal{H}^1(M)$, l'espace des formes harmoniques L^2, s'injecte dans $H^1_p(M)$.

En particulier, ceci implique que $H^1_p(M)$ est un espace de formes harmoniques :

$$H^1_p(M) \subset \{\omega \in L^p(\Lambda^1 T^\star M) : \vec{\Delta}\omega = 0\}.$$

Sous les hypothèses de la Proposition 2.5.11, toute forme harmonique L^2 est en fait dans L^∞, donc dans L^p pour tout $p \geq 2$, et c'est de là que vient l'injection $\mathcal{H}^1(M) \hookrightarrow H^1_p(M)$. On a de plus

Proposition 2.5.12 *Soit M une variété Riemannienne complète non-compacte, vérifiant l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, et dont la croissance du volume est compatible avec la dimension de Sobolev. Soit E un fibré Riemannien sur M, muni d'une connexion compatible ∇, et L un opérateur de type Schrödinger :*

$$L = \nabla^\star\nabla + \mathcal{R},$$

agissant sur les sections de E. On suppose que $\mathcal{R}_-$ est dans $L^{\frac{n}{2}\pm\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Soit $p \geq 2$. Alors toute section ω de E, qui est dans L^p et vérifie $L\omega = 0$, est dans $L^1 \cap L^\infty$ (donc en particulier dans L^2).

En particulier, pour L le Laplacien de Hodge-DeRham sur les 1-formes :

Corollaire 2.5.10 *Soit $p \geq 2$. Soit M une variété Riemannienne complète non-compacte, vérifiant l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, et dont la croissance du volume est compatible avec la dimension de Sobolev. Supposons que la partie négative de la courbure de Ricci soit dans $L^{\frac{n}{2}\pm\varepsilon}$ pour un $\varepsilon > 0$, et que la transformée de Riesz sur M soit bornée sur L^p. Alors*

$$H^1_p(M) = \mathcal{H}^1(M).$$

Remarque 2.5.4 *Cela améliore un résultat de [10] selon lequel si M vérifie l'inégalité de Sobolev de dimension n, et si la partie négative de la courbure de Ricci est dans $L^{n/2}$ pour un $n > 4$, alors toute forme harmonique dans L^p, pour $p = \frac{2n}{n-2}$, est aussi dans L^2.*

Preuve :

Soit ω une section L^p de E telle que $L\omega = 0$: c'est-à-dire que

$$(\bar{\Delta} + \mathcal{R}_+)\omega - \mathcal{R}_-\omega = 0.$$

On pose $H := \bar{\Delta} + \mathcal{R}_+$.

Lemme 2.5.7 *La formule suivante est valable dans L^p :*

$$\omega = -H^{-1}\mathcal{R}_-\omega \tag{2.34}$$

Preuve :

Soit $\eta := -H^{-1}\mathcal{R}_-\omega$, alors $\eta \in L^p$ puisque d'après le Lemme 2.5.5, $H^{-1}\mathcal{R}_- \in \mathcal{L}(L^p, L^p)$, et de plus

$$H(\omega - \eta) = 0.$$

D'après l'inégalité de Kato,

$$\Delta|\omega - \eta| \leq 0,$$

c'est-à-dire que $|\omega - \eta|$ est sous-harmonique. Mais d'après Yau [61], il n'y a pas de fonctions sous-harmoniques positive dans L^p, non constante, sur une variété complète. M étant de volume infini d'après l'hypothèse de croissance du volume compatible avec la dimension de Sobolev, la seule fonction constante dans L^p est la fonction nulle. On en déduit que $\omega = \eta$.

□

Fin de la preuve de la Proposition 2.5.12 : Si l'on pose $T := H^{-1}\mathcal{R}_-$, alors d'après la Proposition 2.5.7 il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $T^N\omega \in L^1 \cap L^\infty$. Mais par (2.34),

$$\omega = T^N\omega,$$

ce qui prouve que $\omega \in L^1 \cap L^\infty$.

□

2.6 Etude de la transformée de Riesz pour $1 < p < n$

Comme annoncé dans l'introduction, nous supprimons à présent l'hypothèse $\mathcal{H}^1(M) = \{0\}$. Cette partie sera consacrée à la preuve du résultat suivant :

Théorème 2.6.1 *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne complète qui satisfait l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, et dont la partie négative de la courbure de Ricci est dans $L^{\frac{n}{2}-\varepsilon} \cap L^\infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$. On suppose que n est strictement supérieur à 3, et que la croissance du volume de M est compatible avec la dimension de Sobolev. Alors pour tout $1 < p < n$, la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p.*

Les hypothèses faites sur M impliquent (d'après la Proposition 2.5.10) que M satisfait l'inégalité de Faber-Krahn relative d'exposant n, ce qui est équivalent à la conjonction de l'estimée Gaussienne du noyau de la chaleur (G) et du fait que la mesure soit doublante (D). Et on sait d'après [17] que ceci implique que la transformée de Riesz sur M est bornée pour tout $1 < p \leq 2$. Ce que nous allons montrer est que la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p pour tout $\frac{n}{n-1} < p < n$, ce qui suffira donc à prouver le résultat.

La preuve du Théorème 2.6.1 repose sur un argument de perturbation : en se servant d'idées tirées de [12], nous allons montrer que si V est un potentiel positif, lisse à support compact, alors $d(\Delta + V)^{-1/2} - d\Delta^{-1/2}$ est borné sur L^p pour $\frac{n}{n-1} < p < n$. Ensuite, nous montrerons que si V est choisi de telle sorte que $\vec{\Delta} + V$ soit fortement positif, $d(\Delta + V)^{-1/2}$ est borné sur L^p pour $\frac{n}{n-1} < p < n$. Le Lemme suivant achèvera alors la preuve du Théorème 2.6.1 :

Lemme 2.6.1 *Soit (M, g) une variété Riemannienne complète qui satisfait l'inégalité de Sobolev de dimension n, et dont la partie négative de la courbure de Ricci est dans $L^{n/2}$. Alors on peut trouver un potentiel positif V, lisse et à support compact, tel que $\vec{\Delta} + V$ soit fortement positif.*

Preuve :

Si on écrit $\vec{\Delta} + V = (\bar{\Delta} + W_+) - W_- = H - W_-$, et $A := H^{-1/2} W_- H^{-1/2}$, alors par définition de la forte positivité, $\vec{\Delta}+V$ est fortement positif si et seulement si $||A||_{2,2} < 1$. De plus, d'après le Lemme 2.5.2, on a $||A||_{2,2} \leq C||W_-||_{n/2}$, où C est indépendante du potentiel choisi V. Par conséquent, il suffit de prendre V de telle sorte que $||(V - Ric_-)_-||_{\frac{n}{2}} < \frac{1}{C}$, ce qui est possible puisque $Ric_- \in L^{n/2}$.

□

2.6.1 Un résultat de perturbation

Notre but ici est de montrer :

Théorème 2.6.2 *Supposons $n > 3$. Soit (M^m, g) une variété Riemannienne complète de dimension m, qui satisfait l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, dont la courbure de Ricci est bornée inférieurement. Soit V un potentiel positif, lisse à support compact. Alors pour tout $\frac{n}{n-1} < p < n$, $d(\Delta + V)^{-1/2} - d\Delta^{-1/2}$ est borné sur L^p.*

La preuve est une adaptation de la preuve de [12]. Pour adapter ces idées au cas d'un opérateur de Schrödinger avec un potentiel positif, nous allons avoir besoin de résultats préliminaires. Premièrement, on rappelle le résultat de régularité elliptique « classique » suivant :

Proposition 2.6.1 *Soit $V \in C_0^\infty$ un potentiel positif, et soit Ω un ouvert lisse, relativement compact. Soit Δ_D le Laplacien avec conditions de Dirichlet sur Ω. Alors les transformées de Riesz $d(\Delta_D + V)^{-1/2}$ et $d\Delta_D^{-1/2}$ sont bornées sur L^p pour $1 < p < \infty$.*

On rappelle aussi le Lemme suivant et sa preuve, provenant de [12] :

Lemme 2.6.2 *Soit (M, g) une variété Riemannienne complète à courbure de Ricci bornée inférieurement, et soit $V \in C_0^\infty$ un potentiel positif. Alors pour tout $1 < p < \infty$, il existe une constante C telle que*

$$||df||_p \leq C(||\Delta f||_p + ||f||_p),\ \forall f \in C_0^\infty(M),$$

et

$$||df||_p \leq C(||(\Delta + V)f||_p + ||f||_p),\ \forall f \in C_0^\infty(M).$$

Preuve :

D'après le Théorème 4.1 de [7], la transformée de Riesz locale est bornée sur L^p pour $1 < p < \infty$, i.e. on a l'inégalité suivante pour $a \geq 0$ assez grand :

$$||df||_p \leq C(||\Delta^{1/2} f||_p + a||f||_p),\ \forall f \in C_0^\infty(M).$$

Nous utiliserons alors le fait selon lequel pour tout $1 < p < \infty$, il existe une constante C telle que :

$$||\Delta^{1/2}f||_p \leq C\sqrt{||\Delta f||_p||f||_p} \leq \frac{C}{2}(||\Delta f||_p + ||f||_p).$$

Une preuve de cette inégalité peut se trouver dans [21].
Pour le cas avec potentiel, on a $||(\Delta+V)f||_p + a||f||_p \geq ||\Delta f||_p - ||V||_\infty||f||_p + a||f||_p$. Si on prend $a > ||V||_\infty$, on obtient le résultat.

□

Preuve du Théorème 2.6.2 :
Soit $p \in (\frac{n}{n-1}, n)$. On suit la preuve de Carron [12]. On définit $L_0 := \Delta + V$, $L_1 := \Delta$; soit K_1 un compact à bord lisse contenant le support de V, et K_2, K_3 des compacts à bords lisses tels que $K_1 \subset\subset K_2 \subset\subset K_3$ (on veut dire par là que les K_i sont l'adhérence de leur intérieur, et que K_i est inclus dans l'intérieur de K_j si $i < j$). On pose aussi $\Omega := M \setminus K_1$. Soit (ρ_0, ρ_1) une partition de l'unité telle que $\rho_1|_{K_1} \equiv 1$, supp $\rho_0 \subset \Omega$ et supp $\rho_1 \subset K_2$. On prend aussi ϕ_0 et ϕ_1 des fonctions lisses, positives telles que supp $\phi_0 \subset \Omega$, supp $\phi_1 \subset K_3$ et telles que $\phi_i\rho_i = \rho_i$ pour $i = 1, 2$. De plus, on suppose que $\phi_1|_{K_2} \equiv 1$.
Définissons $H_0 := \Delta + V$ avec conditions au bord de Dirichlet sur K_3, et $H_1 := \Delta$ avec conditions au bord de Dirichlet sur K_3. Alors, suivant Carron, on construit des paramétrices pour $e^{-t\sqrt{L_1}}$ et $e^{-t\sqrt{L_0}}$: celle pour $e^{-t\sqrt{L_1}}$ est définie par

$$E_t^1(u) := \phi_1 e^{-t\sqrt{H_1}}(\rho_1 u) + \phi_0 e^{-t\sqrt{L_1}}(\rho_0 u),$$

et celle pour $e^{-t\sqrt{L_0}}$ par

$$E_t^0(u) := \phi_1 e^{-t\sqrt{H_0}}(\rho_1 u) + \phi_0 e^{-t\sqrt{L_1}}(\rho_0 u).$$

Remarquons que pour $e^{-t\sqrt{L_0}}$, on approche par $e^{-t\sqrt{L_1}}$ en-dehors du compact K_3, et pas par $e^{-t\sqrt{L_0}}$. Remarquons aussi que $E_0^1(u) = E_0^0(u) = u$, comme il se doit. On a alors :

$$e^{-t\sqrt{L_i}}(u) = E_t^i(u) - G_i\left[\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L_i\right)E_t^i(u)\right],$$

où G_i est l'opérateur de Green sur $\mathbb{R}_+ \times M$ avec conditions au bord de Dirichlet, associé à $-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L_i$.

Ensuite, on doit montrer que le terme d'erreur peut se contrôler. On calcule :

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L_1\right)E_t^1(u) = [L_1, \phi_0]e^{-t\sqrt{L_1}}(\rho_0 u) + [L_1, \phi_1]e^{-t\sqrt{H_1}}(\rho_1 u),$$

et

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L_0\right)E_t^0(u) = [L_0, \phi_1]e^{-t\sqrt{H_0}}(\rho_1 u) + [L_1, \phi_0]e^{-t\sqrt{L_1}}(\rho_0 u) + (L_0 - L_1)\phi_0 e^{-t\sqrt{L_1}}(\rho_0 u).$$

Mais $L_0 - L_1 = V$ est à support dans K_1, donc $(L_0 - L_1)\phi_0 e^{-t\sqrt{L_1}}(\rho_0 u) = 0$. De plus, on a $[\Delta + V, \phi_i] = [\Delta, \phi_i]$, et donc $[L_0, \phi_1]e^{-t\sqrt{H_0}}(\rho_1 u) = (\Delta\phi_1)(e^{-t\sqrt{H_0}}(\rho_1 u)) - 2\langle d\phi_1, \nabla e^{-t\sqrt{H_0}}(\rho_1 u)\rangle$. Posons $S_t^i(u) := \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L_i\right)E_t^i(u)$. On obtient :

$$S_t^1(u) = [\Delta, \phi_0]e^{-t\sqrt{L_1}}(\rho_0 u) + [\Delta, \phi_1]e^{-t\sqrt{H_1}}(\rho_1 u),$$

et

$$S_t^0(u) = [\Delta, \phi_0]e^{-t\sqrt{L_1}}(\rho_0 u) + [\Delta, \phi_1]e^{-t\sqrt{H_0}}(\rho_1 u).$$

Le Lemme 2.4 de [12] implique :

$$||[\Delta, \phi_0]e^{-t\sqrt{\Delta}}(\rho_0 u)||_1 + ||[\Delta, \phi_0]e^{-t\sqrt{\Delta}}(\rho_0 u)||_p \leq \frac{C}{(1+t)^{n/p}}||u||_p, \ \forall t > 0.$$

De plus, si

$$f_0(u) := [\Delta, \phi_1]e^{-t\sqrt{H_0}}(\rho_1 u) = (\Delta\phi_1)e^{-t\sqrt{H_0}}(\rho_1 u) - 2\langle d\phi_1, \nabla e^{-t\sqrt{H_0}}(\rho_1 u)\rangle,$$

et

$$f_1(u) := [\Delta, \phi_1]e^{-t\sqrt{H_1}}(\rho_1 u) = (\Delta\phi_1)e^{-t\sqrt{H_1}}(\rho_1 u) - 2\langle d\phi_1, \nabla e^{-t\sqrt{H_1}}(\rho_1 u)\rangle,$$

on a comme dans [12], pour $i = 1, 2$:

$$||f_i(u)||_1 + ||f_i(u)||_p \leq \frac{C}{(1+t)^{n/p}}||u||_p, \ \forall t > 0.$$

En effet, si on note $p_i^D(t, x, y)$ le noyau de la chaleur de H_i, alors pour tous F_1, F_2 compacts disjoints,

$$\lim_{t \to 0} p_i^D(t, ., .)|_{F_1 \times F_2} = 0 \text{ dans } C^1$$

(cf [26] Lemme 3.2 et [50], Proposition 5.3). Mais d'après nos hypothèses, les supports de ρ_1 et de $\Delta\phi_1$ sont compacts et disjoints, de même que ceux de ρ_1 et $d\phi_1$. Par conséquent, les noyaux des opérateurs $S^i(t) := [\Delta, \phi_1]e^{-t\sqrt{H_i}}\rho_1$ sont bornés uniformément lorsque $t \to 0$. On obtient donc :

$$||S^i(t)||_{p,\infty} \leq C, \ \forall t \in [0, 1].$$

A présent, puisque les opérateurs H_i ont un trou spectral, $||e^{-t\sqrt{H_i}}||_{2,2} \leq e^{-ct}$, où $c > 0$. De plus,

$$e^{-tH_1}u \leq e^{-tH_0}u, \ \forall u \geq 0 \text{ à support dans } K_3,$$

et puisque e^{-tH_0} est sous-markovien, e^{-tH_1} l'est aussi. Par l'identité de subordination, on en déduit que

$$||e^{-t\sqrt{H_i}}||_{1,1} + ||e^{-t\sqrt{H_i}}||_{\infty,\infty} \leq C.$$

Si on interpole ceci avec la borne L^2, on obtient que

$$||e^{-t\sqrt{H_i}}||_{p,p} \leq Ce^{-ct},$$

pour $1 < p < \infty$, où les constantes C et c dépendent de p. On écrit alors, pour $t \geq 1$:

$$||S^i(t)u||_\infty \leq ||[\Delta, \phi_1]e^{-\frac{1}{2}\sqrt{H_i}}||_{L^p \to L^\infty}||e^{-(t-1/2)\sqrt{H_i}}\rho_1 u||_{L^p} \leq Ce^{-ct}||u||_p.$$

Ici, nous avons utilisé le fait que les noyaux de la chaleur $p_i^D(\frac{1}{2}, ., .)$ sont C^∞. On a donc montré :

Lemme 2.6.3

$$||S_t^i(u)||_1 + ||S_t^i(u)||_p \leq \frac{C}{(1+t)^{n/p}}||u||_p, \ \forall t > 0.$$

Le terme d'erreur, lorsque l'on approche $e^{-t\sqrt{L_i}}$ par la paramétrice précédente, est $G_i(S_t^i(u))$. L'argument de [12] montre que lorsqu'on l'intègre en temps, on peut le contrôler : plus précisément, étant donné le résultat du Lemme 2.6.3, on a le Lemme suivant, conséquence de l'argument de [12] :

Lemme 2.6.4 *Supposons $n>3$. Soit $(g_i(u))(x) := \int_0^\infty (G_i(S_t^i(u)))(t,x)dt$. Alors pour tout $\frac{n}{n-1}<p<n$, il existe une constante C telle que pour tout $u\in L^p$,*

$$||L_i(g_i(u))||_p + ||g_i(u)||_p \leq C||u||_p.$$

Si on applique le Lemme 2.6.3, on en déduit que

$$||d(g_i(u))||_p \leq C||u||_p.$$

On peut alors finir la preuve du Théorème 2.6.2. On utilise la formule

$$L_i^{-1/2} = c\int_0^\infty e^{-t\sqrt{L_i}}dt,$$

pour obtenir

$$L_i^{-1/2}u = \phi_1 H_i^{-1/2}\rho_1 u + \phi_0 L_1^{-1/2}\rho_0 u - cg_i(u).$$

Par conséquent,

$$dL_1^{-1/2}u - dL_0^{-1/2}u = \big(d(\phi_1 H_1^{-1/2}\rho_1 u) - d(\phi_1 H_0^{-1/2}\rho_1 u)\big) + c\big(dg_0(u) - dg_1(u)\big).$$

(c'est ici qu'on utilise le fait qu'on a pris comme paramétrices $e^{-t\sqrt{L_1}}$ pour les deux opérateurs en-dehors d'un compact). On écrit $d(\phi_1 H_i^{-1/2}\rho_1 u) = (d\phi_1)H_i^{-1/2}\rho_1 u + \phi_1 dH_i^{-1/2}\rho_1 u$. $(d\phi_1)H_i^{-1/2}\rho_1$ a un noyau lisse à support compact, et donc est borné sur L^p. Si l'on applique la Proposition 2.6.1, on obtient que $\phi_1 dH_i^{-1/2}\rho_1$ est borné sur L^p, d'où le résultat.

□

2.6.2 Etude de $d(\Delta+V)^{-1/2}$

On montre à présent :

Théorème 2.6.3 *Supposons $n>3$. Soit (M^m,g) une variété Riemannienne complète de dimension m, qui satisfait l'inégalité de Sobolev de dimension n $(\mathcal{S}_n)$, et dont la partie négative de la courbure de Ricci est dans $L^{\frac{n}{2}-\varepsilon}\cap L^\infty$ pour un certain $\varepsilon>0$. On suppose aussi que la croissance du volume de M est compatible avec la dimension de Sobolev. Soit $V\in C_0^\infty$ un potentiel positif, tel que $\vec{\Delta}+V$ soit fortement positif. Alors la transformée de Riesz avec potentiel $d(\Delta+V)^{-1/2}$ est bornée sur L^p pour tout $1<p<n$.*

On montre d'abord un résultat préliminaire :

Lemme 2.6.5 *$(\vec{\Delta}+V)^{-1/2}d$ est borné sur L^p pour tout $2\leq p<\infty$.*

Preuve :

Puisque $\vec{\Delta}+V$ est fortement positif, le Corollaire 2.5.9 donne que $d^\star\left(\vec{\Delta}+V\right)^{-1/2}$ est borné sur L^p pour tout $1<p\leq 2$. En passant aux duaux, on obtient le résultat.

□

Preuve du Théorème 2.6.3 :
Premièrement, remarquons qu'on peut se restreindre au cas $\frac{n}{n-1} < p < n$. En effet, pour $1 < p < 2$, puisque les hypothèses que nous avons faites impliquent qu'on a sur M l'inégalité de Faber-Krahn, et étant donné qu'on a la domination $e^{-t(\Delta+V)} \leq e^{-t\Delta}$, on a une estimée Gaussienne supérieure sur $e^{-t(\Delta+V)}$. Ainsi, le résultat de [17] montre que $d(\Delta+V)^{-1/2}$ est borné sur L^p pour tout $1 < p \leq 2$. Posons donc $p \in (\frac{n}{n-1}, n)$.
Le problème pour déduire du Lemme 2.6.5 que la transformée de Riesz avec potentiel $d(\Delta+V)^{-1/2}$ est bornée sur L^p, est qu'on n'a pas la relation de commutation $d(\Delta+V)^{-1/2} = (\vec{\Delta}+V)^{-1/2}d$. Afin de surmonter cette difficulté, on utilise à nouveau la méthode de [12]. On aura besoin du Lemme suivant :

Lemme 2.6.6 *Pour tous $1 \leq r \leq s \leq \infty$, on a l'existence d'une constante C telle que :*

$$||e^{-t(\vec{\Delta}+V)}||_{L^r\to L^s} \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{s})}}.$$

On reporte la preuve de ce Lemme jusqu'à la fin de ce paragraphe. Soit E le fibré vectoriel de base $M\times\mathbb{R}_+$, dont la fibre en (t,p) est $\Lambda^1 T_p^*M$. Soit G l'opérateur « de Green » agissant sur les sections de E, dont le noyau est donné par

$$G(\sigma,s,x,y) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\frac{(\sigma-s)^2}{4t}} - e^{-\frac{(\sigma+s)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right] \vec{p_t}^V(x,y)dt,$$

où $\vec{p_t}^V$ est le noyau de $e^{-t(\vec{\Delta}+V)}$. On peut voir que G satisfait :

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} + (\vec{\Delta}_x+V)\right)G = I,$$

et que $G(\sigma,s,x,y)$ est fini si $x \neq y$ et $\sigma \neq s$ (ici on utilise l'estimée $||\vec{p_t}^V(x,y)|| \leq \frac{C}{t^{n/2}}$, donnée par le Théorème 2.5.6). On veut écrire, comme dans la preuve du Théorème 2.6.2, que pour $u \in C_0^\infty(M)$,

$$e^{-t\sqrt{\vec{\Delta}+V}}du = de^{-t\sqrt{\Delta+V}}u - G\left(\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\vec{\Delta}+V)\right)de^{-t\sqrt{\Delta+V}}u\right). \tag{2.35}$$

A présent, il s'agit de justifier la formule (2.35) ; en passant nous allons aussi montrer quelques estimées qui seront utiles par la suite. On calcule :

$$\begin{aligned}\left(-\tfrac{\partial^2}{\partial t^2} + (\vec{\Delta}+V)\right)de^{-t\sqrt{\Delta+V}}u &= -d(\Delta+V)e^{-t\sqrt{\Delta+V}}u + (\vec{\Delta}+V)de^{-t\sqrt{\Delta+V}}u \\ &= -\big(e^{-t\sqrt{\Delta+V}}u\big)(dV).\end{aligned}$$

On a :

$$||e^{-t\sqrt{\Delta+V}}||_{L^p\to L^\infty} \leq \frac{C}{t^{n/p}},\ \forall t>0,$$

et

$$||e^{-t\sqrt{\Delta+V}}||_{L^p\to L^p} \leq 1,\ \forall t>0.$$

(cela vient de la domination $e^{-t(\Delta+V)} \leq e^{-t\Delta}$). Ainsi, si l'on pose

$$f := \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\vec{\Delta} + V)\right) de^{-t\sqrt{\Delta+V}}u,$$

f est à support compact inclus dans le support de V, et on a donc

Lemme 2.6.7

$$||f(t,.)||_1 + ||f(t,.)||_p \leq \frac{C}{(1+t)^{n/p}}||u||_p.$$

Montrons à présent :

Lemme 2.6.8 *Si u est dans $C_0^\infty(M)$, $||G(f)(t,.)||_2$ est borné uniformément par rapport à $t > 0$, et*

$$\lim_{t\to 0} ||G(f)(t,.)||_2 = 0.$$

Preuve :

Posons $K_s(t,\sigma) := \frac{e^{-\frac{(\sigma-t)^2}{4s}} - e^{-\frac{(\sigma+t)^2}{4s}}}{\sqrt{4\pi s}}$, $L = \vec{\Delta} + V$ et $\vec{p_t}^V(x,y)$ le noyau de e^{-tL}.

$$\begin{aligned}
G(f)(t,x) &= \int G(\sigma,t,x,y)f(\sigma,y)d\sigma dy \\
&= \int_M \int_0^\infty \int_0^\infty K_s(t,\sigma)\, \vec{p_s}^V(x,y) f(\sigma,y)\, ds d\sigma dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty K_s(t,\sigma) \left(\int_M \vec{p_s}^V(x,y) f(\sigma,y)\, dy\right) ds d\sigma \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty K_s(t,\sigma) \left(e^{-sL} f(\sigma,.)\right)(x)\, ds d\sigma
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$||G(f)(t,.)||_2 \leq \int_0^\infty \int_0^\infty K_s(t,\sigma)\, ||e^{-sL} f(\sigma,.)||_2\, ds d\sigma.$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
||e^{-sL} f(\sigma,.)||_2 &\leq \min\left(\tfrac{1}{s^{n/4}}||f(\sigma,.)||_1, ||f(\sigma,.)||_2\right) \\
&\leq C||u||_2 \min\left(\tfrac{1}{s^{n/4}} \tfrac{1}{(1+\sigma)^{n/2}}, \tfrac{1}{(1+\sigma)^{n/2}}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
||G(f)(t,.)||_2 \leq\ & C||u||_2 \int_0^\infty \tfrac{1}{(1+\sigma)^{n/2}} \left(\int_0^1 \frac{e^{-\frac{(\sigma-t)^2}{4s}} - e^{-\frac{(\sigma+t)^2}{4s}}}{\sqrt{s}}\, ds + \right. \\
& \left. \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{(\sigma-t)^2}{4s}} - e^{-\frac{(\sigma+t)^2}{4s}}}{s^{\frac{n}{4}+\frac{1}{2}}}\, ds\right) d\sigma
\end{aligned}$$

Puisque $n \geq 3$, les trois intégrales $\int_0^\infty \frac{d\sigma}{(1+\sigma)^{n/2}}$, $\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}}$ et $\int_1^\infty \frac{ds}{s^{\frac{n}{4}+\frac{1}{2}}}$ convergent, et ceci entraîne que $||G(f)(t,.)||_2$ est borné uniformément par rapport à $t > 0$. De plus, on peut appliquer le Théorème de convergence dominée pour en déduire que

$$\lim_{t\to 0} ||G(f)(t,.)||_2 = 0.$$

□

Ainsi, si l'on pose

$$\varphi(t,.) := e^{-t\sqrt{\vec{\Delta}+V}}du - de^{-t\sqrt{\Delta+V}}u + G\left(\left(-\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} + (\vec{\Delta}+V)\right) de^{-\sigma\sqrt{\Delta+V}}u\right)(t,.)\,,$$

$\varphi(t,.)$ satisfait :

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\vec{\Delta}+V)\right)\varphi = 0, \tag{2.36}$$

et

$$L^2 - \lim_{t\to 0}\varphi(t,.) = 0. \tag{2.37}$$

Pour cette dernière assertion, on a utilisé le fait que

$$L^2 - \lim_{t\to 0} e^{-t\sqrt{\vec{\Delta}+V}}du = L^2 - \lim_{t\to 0} de^{-t\sqrt{\Delta+V}}u = du. \tag{2.38}$$

Justifions ceci : par le Théorème Spectral ((c) du Théorème VIII.5 de [51]), $\sqrt{\Delta+V}e^{-t\sqrt{\Delta+V}}u$ converge dans L^2 lorsque $t \to 0$, si $u \in C_0^\infty(M)$; puisque $V \geq 0$, la transformée de Riesz $d(\Delta+V)^{-1/2}$ est bornée sur L^2, et on peut en déduire que $de^{-t\sqrt{\Delta+V}}u$ converge dans L^2. La limite est nécessairement du, ce qui montre (2.38). De plus, $\varphi(t,.)$ est borné dans L^2 uniformément par rapport à $t > 0$ (à u fixé dans C_0^∞) : pour montrer ceci, on écrit

$$de^{-t\sqrt{\Delta+V}}u = d(\Delta+V)^{-1/2}\sqrt{\Delta+V}e^{-t\sqrt{\Delta+V}}u,$$

et par analyticité sur L^2 de $e^{-t\sqrt{\Delta+V}}$,

$$||\sqrt{\Delta+V}e^{-t\sqrt{\Delta+V}}||_{2,2} \leq \frac{C}{t}.$$

Donc en utilisant que $d(\Delta+V)^{-1/2}$ est bornée sur L^2, on obtient

$$||de^{-t\sqrt{\Delta+V}}u||_2 \leq \frac{C}{t}.$$

Puisqu'on vient de voir que $de^{-t\sqrt{\Delta+V}}u$ converge dans L^2 quand $t \to 0$, on en déduit que $de^{-t\sqrt{\Delta+V}}u$ est uniformément borné dans L^2 pour $t > 0$. Pour le terme $e^{-t\sqrt{\vec{\Delta}+V}}du$, il suffit de dire que

$$||e^{-t\sqrt{\vec{\Delta}+V}}du||_2 \leq ||du||_2.$$

En utilisant les propriétés (2.36) et (2.37) vérifiées par $\varphi(t,.)$, ainsi que le fait que $\varphi(t,.)$ est borné dans L^2 uniformément par rapport à $t > 0$, on peut déduire par le Théorème Spectral pour $\vec{\Delta}+V$ que $\varphi \equiv 0$. Ceci prouve la formule (2.35).

Si l'on pose $(g(u))(x) := \int_0^\infty (G(f))(t,x)dt$, on a, par intégration de la formule (2.35) :

$$(\vec{\Delta}+V)^{-1/2}du = d(\Delta+V)^{-1/2}u - cg.$$

D'après le Lemme 2.6.7 et le Lemme 2.6.6, on a en reprenant les arguments de [12] :

$$||g||_p \leq C||u||_p.$$

Par le Lemme 2.6.5, on en déduit que $d(\Delta+V)^{-1/2}$ est borné sur L^p.

□

Preuve du Lemme 2.6.6 :
Posons $L := \vec{\Delta} + V$. Si l'on arrive à montrer que $||e^{-tL}||_{\infty,\infty} \leq C$, $||e^{-tL}||_{1,1} \leq C$ et $||e^{-tL}||_{1,\infty} \leq \frac{C}{t^{n/2}}$, alors par des arguments standards d'interpolation on a le résultat. Le fait que $||e^{-tL}||_{\infty,\infty} \leq C$ vient des estimées Gaussiennes qu'on a sur e^{-tL} (ceci par le Théorème 2.5.6), et du fait que $\frac{1}{V(x,\sqrt{t})}\int_M e^{-c\frac{d^2(x,y)}{t}}dy$ est borné uniformément par rapport à $x \in M$ et à $t > 0$. Alors par dualité (ou par symétrie) $||e^{-tL}||_{1,1} \leq C$. De plus, d'après le Théorème 2.5.4 on a aussi l'estimée :

$$||e^{-tL}||_{2,\infty} \leq \frac{C}{t^{n/4}},\ \forall t > 0.$$

Par dualité, on en déduit que

$$||e^{-tL}||_{1,2} \leq \frac{C}{t^{n/4}},\ \forall t > 0,$$

et par composition

$$||e^{-tL}||_{1,\infty} \leq ||e^{-tL}||_{1,2}||e^{-tL}||_{2,\infty} \leq \frac{C^2}{t^{n/2}},\ \forall t > 0.$$

□

2.7 Résultats de perturbation pour la transformée de Riesz

Dans cette partie, nous allons généraliser le résultat de perturbation pour la transformée de Riesz de [12], afin de dépasser la restriction $p < n$. Nous le ferons sous l'une des deux conditions suivantes : lorsque la variété de départ est p-hyperbolique ou lorsqu'elle n'a qu'un bout. Puis, nous étudierons la transformée de Riesz sur la variété $M = \mathbb{R}^n \# \mathbb{H}^n$, obtenue par somme connexe d'un espace euclidien et d'un espace hyperbolique.

2.7.1 Rappels sur la p-hyperbolicité

Rappelons tout d'abord quelques notions concernant la p-hyperbolicité. Des références pour ceci sont [19] et [31]. Fixons $1 < p < \infty$.

Définition 2.7.1 *On dit qu'une variété Riemannienne (M, g) est **p-hyperbolique** si pour tout ouvert U relativement compact non-vide de M, il existe une constante C_U telle que*

$$\int_U |f|^p \leq C_U \int_M |\nabla f|^p,\ f \in C_0^\infty(M).$$

On a, comme pour le cas $p = 2$, la Proposition suivante dont nous rappelons la démonstration :

Proposition 2.7.1 *(M, g) est p-hyperbolique si et seulement si il existe **un** ouvert U relativement compact non-vide de M et une constante C_U telle que*

$$\int_U |f|^p \leq C_U \int_M |\nabla f|^p,\ f \in C_0^\infty(M).$$

Preuve :

Il suffit de montrer que pour tout ouvert connexe W lisse relativement compact contenant U, il existe C_W tel que

$$\int_W |f|^p \leq C_W \int_M |\nabla f|^p, \ f \in C_0^\infty(M).$$

Nous aurons besoin du Lemme suivant :

Lemme 2.7.1 *Pour tous ouverts lisses relativement compacts Ω_1, Ω_2, tels que $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$ et tels que $\Omega := \Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1$ soit connexe, alors il existe une constante C_Ω telle que*

$$||f||_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega ||\nabla f||_{L^p(\Omega)}, \forall f \in C^\infty_{D-N}(\Omega), \tag{2.39}$$

où $C^\infty_{D-N}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions C^∞ sur Ω valant 0 sur $\partial\Omega_1$ (l'indice $D-N$ est pour « Dirichlet-Neumann »).

Admettons pour l'instant ce Lemme, et achevons la démonstration de la Proposition 2.7.1. Soit V ouvert lisse non-vide tel que $V \subset\subset U$ et tel que $W \setminus V$ soit connexe, et soit ρ une fonction lisse à support compact inclus dans U, telle que $\rho \equiv 1$ sur V. Alors

$$||f||_{L^p(W)} \leq ||\rho f||_{L^p(W)} + ||(1-\rho)f||_{L^p(W)}.$$

Puisque $||\rho f||_{L^p(W)} = ||\rho f||_{L^p(U)}$, on a par hypothèse

$$||\rho f||_{L^p(W)} \leq C_U ||\nabla(\rho f)||_p \leq C_U \left(||f\nabla\rho||_p + ||\rho\nabla f||_p\right).$$

Par ailleurs, $||\rho\nabla f||_p \leq ||\rho||_\infty ||\nabla f||_p$, et par hypothèse puisque le support de $\nabla\rho$ est inclus dans U,

$$||f\nabla\rho||_p \leq ||\nabla\rho||_\infty ||f||_{L^p(U)} \leq C||\nabla f||_p.$$

Il reste donc à traiter le terme $||(1-\rho)f||_{L^p(W)}$. On applique le Lemme 2.7.1 avec $\Omega = W\setminus V$, pour obtenir

$$||(1-\rho)f||_{L^p(W)} \leq C||\nabla\left((1-\rho)f\right)||_p \leq C\left(||\nabla(\rho f)||_p + ||\nabla f||_p\right),$$

et on fait comme précédemment pour borner $||\nabla(\rho f)||_p$ par $C||\nabla f||_p$.

□

Preuve du Lemme 2.7.1 : Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite de fonctions $f_n \in C^\infty_{D-N}$ telle que $||f_n||_{L^p} = 1$, et $||\nabla f_n||_{L^p} \to 0$. Puisque $W^{1,p}(\Omega)$ est reflexif pour $1 < p < \infty$, quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que la suite $(f_n)_n$ converge faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$ vers f. Mais on a l'injection de Sobolev compacte $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p$, donc $(f_n)_n$ converge dans L^p, et par suite converge fortement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$. La fonction f vérifie alors $\nabla f = 0$ au sens faible, et ceci implique que $\nabla f = 0$ au sens fort, puis que f est constante car Ω est connexe. De plus, le théorème de trace pour $W^{1,p}$ montre que $f|_{\partial\Omega_1} = 0$, et donc f est nulle. Ceci contredit le fait que $||f||_p = 1$.

□

Nous utiliserons aussi une autre caractérisation de la p-hyperbolicité. Définissons d'abord :

Définition 2.7.2 *Si U est un ouvert non-vide relativement compact de M, on définit sa **p-capacité** par*

$$Cap_p(U) = \inf\left\{\int_M |\nabla u|^p : u \in C_0^\infty \text{ telle que } u|_U \geq 1\right\}.$$

On a avec cette définition la caractérisation suivante de la p-hyperbolicité :

Théorème 2.7.1 *M est p-hyperbolique si et seulement si la p-capacité d'un (de tout) ouvert non-vide relativement compact est non-nulle.*

Preuve :

Il est clair que si M est p-hyperbolique, alors la p-capacité de tout ouvert non-vide relativement compact est non-nulle. Pour la réciproque, procédons par contraposée et supposons M p-parabolique. Soit Ω un ouvert non-vide, connexe, lisse et relativement compact de M. Puisque M est p-parabolique, on peut trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions C_0^∞ telle que

$$\lim_{n\to\infty} ||\nabla f_n||_p = 0$$

et

$$||f_n||_p = \mathrm{Vol}(\Omega)^{1/p},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$, qui est réflexif, donc on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$. Puisque l'inclusion $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compacte, on peut aussi supposer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^p(\Omega)$, donc aussi dans $W^{1,p}(\Omega)$, vers une certaine fonction f. Cette fonction f vérifie $\nabla f = 0$, donc est constante puisque Ω est connexe. Etant donné que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||f_n||_p = \mathrm{Vol}(\Omega)^{1/p}$, nécessairement $f \equiv 1$. Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 dans l'espace $\mathbb{D}_p^0$, qui est par définition la clôture de C_0^∞ pour la norme

$$g \mapsto ||g||_{L^p(U)} + ||\nabla g||_p.$$

Mais d'après [19], p.13, ceci implique que la p-capacité de Ω est nulle, ce qui contredit l'hypothèse.

Corollaire 2.7.1 *Une variété Riemannienne M est p-hyperbolique si et seulement si l'un de ses bouts est p-hyperbolique.*

Preuve :

Il suffit de trouver un ouvert non-vide relativement compact Ω, de p-capacité non-nulle. On prend Ω tel que $M \setminus \Omega = M_1 \setminus B_1 \dots M_k \setminus B_k$, les M_i étant les bouts de M, et les B_i des ouverts non-vide relativement compacts de M_i. En utilisant le fait que la p-capacité d'un ouvert non-vide relativement compact U est aussi égale à

$$\inf \left\{ \int_{M\setminus U} |\nabla u|^p : u \in C_0^\infty \text{ telle que } u|_U \equiv 1 \right\},$$

(voir [31], Corollaire 7.5), on voit que

$$\mathrm{Cap}_p(\Omega) = \sum_{i=1}^k \mathrm{Cap}_p^{M_i}(B_i).$$

Par hypothèse, l'un des M_i est p-hyperbolique (par exemple M_1), ce qui implique

$$\mathrm{Cap}_p^{M_1}(B_1) > 0,$$

et donc

$$\mathrm{Cap}_p(\Omega) > 0.$$

□

Remarquons que si la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p, alors la p-hyperbolicité de M implique que pour un (pour tout) ouvert relativement compact U,

$$||\varphi||_{L^p(U)} \leq C_U ||\Delta^{1/2}\varphi||_p, \; \forall \varphi \in C_0^\infty(M). \tag{2.40}$$

Ceci implique :

Proposition 2.7.2 *Soit M une variété Riemannienne p-hyperbolique pour un certain $1 < p < \infty$, de volume infini. On suppose que la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p. Alors*

$$\Delta^{-1/2} : L^p \to L^p_{loc},$$

est un opérateur borné.

Preuve :

Rappelons que le domaine L^p de $\Delta^{1/2}$ est défini comme l'ensemble des fonctions h de L^p telles que $\frac{e^{-t\sqrt{\Delta}}h-h}{t}$ a une limite dans L^p lorsque t tend vers 0. On a de plus le Lemme suivant :

Lemme 2.7.2 *Pour $1 < p < \infty$, $C_0^\infty(M)$ est inclus dans le domaine L^p de $\Delta^{1/2}$, et $\Delta^{1/2}C_0^\infty$ est dense dans L^p. De plus, si $\varphi \in C_0^\infty$, alors $\Delta^{-1/2}\varphi \in L^p$.*

Preuve du Lemme 2.7.2 : Si $f \in C_0^\infty(M)$, on écrit

$$\Delta^{1/2}f = \Delta^{-1/2}\Delta f = \int_0^\infty e^{-t\sqrt{\Delta}}\Delta f dt,$$

et on sépare l'intégrale en $\int_0^1 + \int_1^\infty = I_1 + I_2$. Pour majorer la norme L^p de I_1, on utilise le fait que $\Delta f \in L^p$ et que $||e^{-t\sqrt{\Delta}}||_{p,p} \leq 1$, ce qui donne

$$||I_1||_p \leq ||\Delta f||_p.$$

Pour I_2, on utilise l'analyticité de $e^{-t\sqrt{\Delta}}$ sur L^p, qui implique que

$$\left|\left|\Delta e^{-t\sqrt{\Delta}}\right|\right|_{p,p} \leq \frac{C}{t^2}.$$

On obtient donc

$$||I_2||_p \leq C||f||_p,$$

qui donne ce qu'on voulait. Si maintenant $\varphi \in C_0^\infty$, on écrit

$$\Delta^{-1/2}\varphi = \Delta^{-3/2}\Delta\varphi = \int_0^\infty e^{-t\sqrt{\Delta}}\Delta\varphi\sqrt{t}dt,$$

et on utilise encore l'analyticité de $e^{-t\sqrt{\Delta}}$ pour montrer que l'intégrale converge dans L^p. Montrons à présent que $\Delta^{1/2}C_0^\infty$ est dense dans L^p. Déjà, $(\Delta+1)C_0^\infty$ est dense dans L^p : en effet, si $f \in L^q$ est orthogonale à $(\Delta+1)C_0^\infty$ (où q est l'exposant dual de p), alors on a au sens faible

$$(\Delta+1)f = 0,$$

et ceci implique par le Théorème 4.1 de [48] que f est constante, puis que f est nulle car M est de volume infini. Donc $(\Delta+1)C_0^\infty$ est dense dans L^p. Ensuite, $\Delta^{1/2}(\Delta+1)^{-1}$ est un opérateur borné sur L^p : pour voir ceci, on écrit

$$\Delta^{1/2}(\Delta+1)^{-1} = \int_0^\infty \Delta^{1/2}e^{-t\Delta}e^{-t}dt,$$

et on utilise l'analyticité de $e^{-t\Delta}$ pour dire que

$$\left|\left|\Delta^{1/2}e^{-t\Delta}\right|\right|_{p,p} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}, \forall t>0.$$

Maintenant, on écrit

$$\Delta^{1/2}C_0^\infty = \Delta^{1/2}(\Delta+1)^{-1}(\Delta+1)C_0^\infty,$$

et puisque $(\Delta+1)C_0^\infty$ est dense dans L^p, et que $\Delta^{1/2}(\Delta+1)^{-1}$ est continu sur L^p, il faut voir que l'image de $\Delta^{1/2}(\Delta+1)^{-1}$ est dense dans L^p. Mais $(\Delta+1)^{-1}L^p = \mathcal{D}_p(\Delta)$, le domaine L^p du Laplacien. Il faut donc voir que $\Delta^{1/2}\mathcal{D}_p(\Delta)$ est dense dans L^p. Mais $\mathcal{D}_p(\Delta)$ contient $\Delta^{1/2}C_0^\infty$ d'après la première partie du Lemme : en effet, si $g\in C_0^\infty$,

$$\Delta(\Delta^{1/2}g) = \Delta^{1/2}(\Delta g),$$

et ceci est dans L^p puisque $\Delta g\in L^p$. Donc $\Delta^{1/2}\mathcal{D}_p(\Delta)$ contient

$$\Delta^{1/2}\Delta^{1/2}C_0^\infty = \Delta C_0^\infty,$$

qui est dense dans L^p par le même argument qu'on a employé afin de montrer que $(\Delta+1)C_0^\infty$ est dense dans L^p.

□

Soit maintenant $g\in C_0^\infty$. On peut, d'après le Lemme 2.7.2, trouver une suite de fonctions φ_n lisses à support compact telles que $\Delta^{1/2}\varphi_n \to g$ dans L^p quand n tend vers l'infini. D'après (2.40) et le fait que la transformée de Riesz est bornée sur L^p, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,p}_{loc}$, et par réflexivité de $W^{1,p}_{loc}$ et par l'injection compacte $W^{1,p}_{loc}\hookrightarrow L^p_{loc}$, on peut supposer que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un f dans $W^{1,p}_{loc}$. Par l'injection compacte $W^{1,p}_{loc}\hookrightarrow L^p_{loc}$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement dans L^p_{loc}, et puisque $\nabla\varphi_n = \nabla\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}\varphi_n$, que $\Delta^{1/2}\varphi_n\to g$ dans L^p et que par hypothèse la transformée de Riesz est bornée sur L^p, on obtient que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers f dans $W^{1,p}_{loc}$. On a donc, pour tout U ouvert non-vide relativement compact, en passant à la limite dans (2.40) appliqué à φ_n :

$$||f||_{L^p(U)} \leq C_U||g||_{L^p}.$$

Il reste à montrer que $f=\Delta^{-1/2}g$. Soit $\psi\in C_0^\infty(M)$. Alors

$$\lim_{n\to\infty}\langle\varphi_n,\psi\rangle = \langle f,\psi\rangle,$$

et par ailleurs en utilisant le fait que $\Delta^{1/2}$ est auto-adjoint sur L^2,

$$\langle\varphi_n,\psi\rangle = \langle\Delta^{1/2}\varphi_n,\Delta^{-1/2}\psi\rangle,$$

et d'après le Lemme 2.7.2, $\Delta^{-1/2}\psi\in L^q$, où q est l'exposant dual de p. On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty}\langle\Delta^{1/2}\varphi_n,\Delta^{-1/2}\psi\rangle = \langle g,\Delta^{-1/2}\psi\rangle,$$

et puisque $g\in C_0^\infty$,

$$\langle g, \Delta^{-1/2}\psi\rangle = \langle \Delta^{-1/2}g, \psi\rangle.$$

Finalement,

$$\langle \Delta^{-1/2}g, \psi\rangle = \langle f, \psi\rangle, \forall \psi \in C_0^\infty(M),$$

ce qui implique que $f = \Delta^{-1/2}g$. On a donc montré que pour tout $g \in C_0^\infty$,

$$||\Delta^{-1/2}g||_{L^p(U)} \leq C_U ||g||_p,$$

ce qui implique le résultat.

□

2.7.2 Un autre résultat de perturbation pour la transformée de Riesz

On va adapter les arguments de Carron dans [12] pour montrer le résultat suivant :

Théorème 2.7.2 *Soit $n > 2$. Soient M, M_0 deux variétés Riemanniennes (pas nécessairement connexes) isométriques en-dehors d'un compact, à courbure de Ricci minorée et vérifiant l'inégalité de Sobolev de dimension n ($\mathcal{S}_n$). On suppose que la transformée de Riesz sur M_0 est bornée sur L^q pour un certain $q > \frac{n}{n-2}$. Soit $\frac{n}{n-1} < p < q$ tel que la transformée de Riesz sur M_0 soit bornée sur L^p, et tel que l'on soit dans l'une des deux situations suivantes :*

1. *M_0 est p-hyperbolique.*
2. ***ou bien** M n'a qu'un seul bout.*

Alors la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p.

Remarque 2.7.1 *Lorsque $n = 3$,*

$$\frac{n}{n-2} = n,$$

donc le résultat n'est intéressant que pour $p > 3$ dans ce cas.

Comme Corollaire, on retrouve un cas particulier du résultat de Guillarmou-Hassell [38] sur les variétés asymptotiquement coniques :

Corollaire 2.7.2 *Soit M une variété Riemannienne complète, isométrique en-dehors d'un compact à une variété conique $M_0 = \mathbb{R}_+^\star \times N$, avec N compacte de dimension $n-1$. Soit λ_1 la première valeur propre non nulle du Laplacien sur N, et soit*

$$p_0 := \frac{n}{\frac{n}{2} - \sqrt{\lambda_1 + \left(\frac{n-2}{2}\right)^2}}$$

(avec par convention $p_0 = \infty$ si $\lambda_1 \geq n-1$). Alors si $n \geq 3$, la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p lorsque $1 < p < p_0$, et n'est pas bornée sur L^p lorsque $p > p_0$.

De plus, en adaptant les arguments de la fin de l'article [12], on aura le résultat suivant :

Corollaire 2.7.3 *Soit M une variété Riemannienne complète, isométrique en-dehors d'un compact à une variété **connexe** à courbure de Ricci positive. On suppose que sur M l'estimée du volume suivante est vérifiée :*

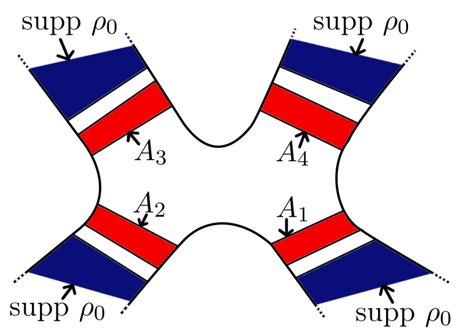
$$V(x, R) \geq CR^n, \forall x \in M, \forall R \geq 1,$$

pour un certain $n > 2$, alors la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p pour tout $\frac{n}{n-1} < p < \infty$.

Enfin, on a aussi le Corollaire suivant :

Corollaire 2.7.4 *Soit $n \geq 3$, et soit N une variété de dimension n, q-hyperbolique pour un certain $q > n$, à courbure de Ricci minorée et de volume infini. Alors la transformée de Riesz sur $M = N \# \mathbb{R}^n$, la somme connexe de N et de $\mathbb{R}^n$, n'est pas bornée sur L^p pour $n < p < q$.*

Preuve du Théorème 2.7.2 : On va raffiner la démonstration de [12]. Pour le cas p-hyperbolique, on reprend la même construction, déjà explicitée précédemment. Soit K_1 un compact à bord lisse tel que $M \setminus K_1$ soit isométrique au complémentaire d'un compact de M_0, et K_2, K_3 des compacts à bords lisses tels que $K_1 \subset K_2 \subset K_3$ et tels que K_i soit contenu dans l'intérieur de K_j pour tous $i < j$. On pose aussi $\Omega := M \setminus K_1$. Soit (ρ_0, ρ_1) une partition de l'unité telle que $\rho_1|_{K_1} \equiv 1$, supp $\rho_0 \subset \Omega$ et supp $\rho_1 \subset K_2$. On prend aussi φ_0 et φ_1 des fonctions lisses, positives telles que supp $\varphi_0 \subset \Omega$, supp $\varphi_1 \subset K_3$ et telles que $\phi_i \rho_i = \rho_i$ pour $i = 1, 2$. De plus, on suppose que $\varphi_1|_{K_2} \equiv 1$. On notera aussi A l'adhérence d'un ouvert lisse relativement compact contenant supp$(d\varphi_0)$. On peut supposer que A et supp(ρ_0) sont à distance strictement positive. De plus, on peut faire en sorte que A soit une réunion disjointe « d'anneaux » A_i connexes, chaque anneau correspondant à un bout de M_0.



En gardant les notations de [12], on a les estimées suivantes pour les termes d'erreur dans la paramétrice de $e^{-t\sqrt{\Delta}}$:

$$||f_i(s,.)||_{L^1} + ||f_i(s,.)||_{L^p} \leq \frac{C}{(1+t)^{\frac{n}{p}}} ||u||_p,$$

mais le problème est qu'on autorise ici p à être strictement plus grand que n, donc $\frac{n}{p} < 1$, ce qui pose problème pour majorer le terme d'erreur : on se retrouve à un moment avec l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^{\frac{n}{p}}}$, qui diverge. Il faut donc revoir les estimées de [12].
On notera Δ_0 le Laplacien sur M_0, et Δ_1 le Laplacien sur K_3 avec conditions de Dirichlet. Soit u dans $L^p(M)$. On reprend la technique de [12] pour la construction de la paramétrice de $e^{-t\sqrt{\Delta}}$: cela consiste à prendre comme paramétrice

$$E(\sigma, u) = \varphi_0 e^{-\sigma\sqrt{\Delta_0}} \rho_0 u + \varphi_1 e^{-\sigma\sqrt{\Delta_1}} \rho_1 u.$$

Alors le terme d'erreur est

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \Delta \right) E(\sigma, u) = f_0(\sigma, .) + f_1(\sigma, .),$$

où les fonctions f_i sont définies par

$$f_i(t,.) = (\Delta\varphi_i)\left(e^{-t\sqrt{\Delta_i}}\rho_i u\right) - 2\langle d\varphi_i, \nabla e^{-t\sqrt{\Delta_i}}\rho_i u\rangle.$$

Puisque $d\Delta_0^{-1/2}$ est borné sur $L^q(M_0)$ et que $e^{-t\sqrt{\Delta_0}}$ est analytique sur L^r pour $1 < r < \infty$ (voir [59] ou [22], cela vient de l'identité de subordination),

$$||\nabla e^{-t\sqrt{\Delta_0}}||_{q,q} \leq \frac{C}{t},\ \forall t > 0.$$

Mais

$$||e^{-t\sqrt{\Delta_0}}||_{p,q} \leq \frac{C}{t^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} = \frac{C}{t^\alpha},\ \forall t > 0,$$

où $\alpha = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0$. On obtient

$$||\nabla e^{-t\sqrt{\Delta_0}}||_{p,q} \leq ||\nabla e^{-\frac{t}{2}\sqrt{\Delta_0}}||_{q,q}||e^{-\frac{t}{2}\sqrt{\Delta_0}}||_{p,q} \leq \frac{C}{t^{1+\alpha}}.$$

Par ailleurs, on a déjà (cf [12])

$$||\nabla e^{-t\sqrt{\Delta_i}}||_{L^p(U)\to L^q(F)} \leq C,\ \forall t \leq 1,$$

si U est un ouvert et F un compact à distance strictement positive de U. On obtient donc

$$||\nabla e^{-t\sqrt{\Delta_0}}||_{L^p(U)\to L^q(F)} \leq \frac{C}{(1+t)^{1+\alpha}},\ \forall t > 0. \tag{2.41}$$

Puisque pour tout F compact, $L^q(F) \hookrightarrow L^1(F)$ et $L^q(F) \hookrightarrow L^p(F)$, et étant donné que le support de ρ_0 et A sont disjoints, on obtient

$$||\langle d\varphi_0, \nabla e^{-t\sqrt{\Delta_0}}\rho_0 u\rangle||_{L^1} + ||\langle d\varphi_0, \nabla e^{-t\sqrt{\Delta_0}}\rho_0 u\rangle||_{L^p} \leq \frac{C}{(1+t)^{1+\alpha}}||u||_p,\ \forall t > 0.$$

Reste le terme $(\Delta\varphi_0)\left(e^{-t\sqrt{\Delta_0}}\rho_0 u\right)$. Rappelons que $A = \sqcup_j A_j$, chaque A_j étant connexe et lisse. Posons $\psi(t) := e^{-t\sqrt{\Delta_0}}\rho_0 u$. Notons $(\psi(t))_{A_j}$ la moyenne de ψ sur A_j. On a, par l'inégalité de Poincaré L^q sur A_j :

$$||\psi(t) - (\psi(t))_{A_j}||_{L^q(A_j)} \leq C||\nabla e^{-t\sqrt{\Delta_0}}\rho_0 u||_{L^q(A_j)} \leq \frac{C}{(1+t)^{1+\alpha}}||u||_p,\ \forall t > 0.$$

D'où, en posant

$$\tilde{f}_0(t,.) = \left[\sum_j \mathbf{1}_{A_j}(\Delta\varphi_0)\left(\psi(t) - (\psi(t))_{A_j}\right)\right] - 2\langle d\varphi_0, \nabla e^{-t\sqrt{\Delta_0}}\rho_0 u\rangle,$$

on obtient

$$||\tilde{f}_0(t,.)||_{L^1} + ||\tilde{f}_0(t,.)||_{L^p} \leq \frac{C}{(1+t)^{1+\alpha}}||u||_p,\ \forall t > 0.$$

De plus, dans [12], il est montré que pour une certaine constante $\lambda > 0$,

$$||f_1(t,.)||_1 + ||f_1(t,.)||_p \leq e^{-\lambda t}||u||_p,\ \forall t > 0,$$

ce qui implique bien sûr

$$||f_1(t,.)||_1 + ||f_1(t,.)||_p \leq \frac{C}{(1+t)^{1+\alpha}}||u||_p,\ \forall t>0.$$

Résumons ce que nous avons obtenu :

Lemme 2.7.3 *Si $\alpha = n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) > 0$, alors il existe une constante C telle que*

$$||\tilde{f}_0(t,.)||_1 + ||\tilde{f}_0(t,.)||_p \leq \frac{C}{(1+t)^{1+\alpha}}||u||_p,\ \forall t>0. \tag{2.42}$$

et

$$||f_1(t,.)||_1 + ||f_1(t,.)||_p \leq \frac{C}{(1+t)^{1+\alpha}}||u||_p,\ \forall t>0. \tag{2.43}$$

Nous suivons toujours la preuve de [12] : en intégrant en temps la paramétrice de $e^{-t\sqrt{\Delta}}$, on obtient une paramétrice pour $\Delta^{-1/2}$:

$$\Delta^{-1/2}u = \varphi_1\Delta^{-1/2}\rho_1 u + \varphi_0\Delta^{-1/2}\rho_0 u - g,$$

où

$$g = \int_{\mathbb{R}_+^2\times M} G(\sigma,s,x,y)\left[\left(-\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\Delta\right)E(\sigma,u)(s,y)\right]d\sigma ds dy,$$

G étant le noyau de l'opérateur de Green associé à $\left(-\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\Delta\right)$. On peut décomposer g en g_1+g_2, avec

$$g_1(x) = \int_{\mathbb{R}_+^2\times M} G(\sigma,s,x,y)\tilde{f}_0(s,y)d\sigma ds dy + \int_{\mathbb{R}_+^2\times M} G(\sigma,s,x,y)f_1(s,y)d\sigma ds dy,$$

et

$$g_2(x) = \sum_j \int_{\mathbb{R}_+^2\times M} G(\sigma,s,x,y)\mathbf{1}_{A_j}(y)(\Delta\varphi_0)(y)\left(\psi(s)\right)_{A_j}))d\sigma ds dy.$$

De plus, G est donné par la formule :

$$G(\sigma,s,x,y) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\frac{(\sigma-s)^2}{4t}} - e^{-\frac{(\sigma+s)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right]p_t(x,y)dt,$$

ce qui conduit à la formule suivante pour g (voir [12]) :

$$g = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2}\left[\int_0^{\frac{s^2}{4r^2}}(e^{-t\Delta}f(s,.))dt\right]drds,$$

si $f = f_0 + f_1$. Ainsi,

$$g_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2}\left(\int_0^{\frac{s^2}{4r^2}}(e^{-t\Delta}(\tilde{f}_0(s,.)+f_1(s,.))dt\right)drds,$$

et

$$g_2 = \sum_j \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2} \left(\int_0^{\frac{s^2}{4r^2}} e^{-t\Delta} (\mathbf{1}_{A_j} (\Delta\varphi_0) \, (\psi(s))_{A_j}) dt \right) drds.$$

On doit montrer que $||dg_1||_p + ||dg_2||_p \leq C||u||_p$. Commençons par

Lemme 2.7.4 *Pour $p > \frac{n}{n-1}$ et $q > \frac{n}{n-2}$, il existe une constante C telle que pour tout $u \in L^p$,*

$$||dg_1||_p \leq C||u||_p.$$

Preuve :

D'après le Lemme 2.6.2, il suffit de montrer que $||g_1||_p + ||\Delta g_1||_p \leq C||u||_p$. Le terme $||\Delta g_1||_p$ est le plus facile : notant $h = \tilde{f}_0 + f_1$, on a

$$\begin{aligned} \Delta g_1 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2} \left(\int_0^{\frac{s^2}{4r^2}} \Delta(e^{-t\Delta} h(s,.)) dt \right) drds \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2} \left(\int_0^{\frac{s^2}{4r^2}} \frac{d}{dt}(e^{-t\Delta} h(s,.)) dt \right) drds \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2} \left(h(s,.) - (e^{-\frac{s^2}{4r^2}\Delta} h(s,.)) \right) drds. \end{aligned}$$

D'où d'après (2.42) et (2.43),

$$\begin{aligned} ||\Delta g_1||_p &\leq \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2} ||h(s,.)||_p drds \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2} \frac{C}{(1+s)^{1+\alpha}} drds \right) ||u||_p \\ &\leq C||u||_p \end{aligned}$$

Pour $||g_1||_p$, utilisant

$$||e^{-t\Delta}||_{1,p} \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}},$$

et (2.42), (2.43), on a

$$\begin{aligned} ||g_1||_p &\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2} \left(\int_0^{\frac{s^2}{4r^2}} ||e^{-t\Delta} h(s,.)||_p dt \right) dsdr \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2} \left(\int_0^{\frac{s^2}{4r^2}} \frac{C}{\max\left(1, t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}\right)(1+s)^{1+\alpha}} dt \right) dsdr \right) ||u||_p \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2} \frac{1}{\max\left(1, t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}\right)(1+2r\sqrt{t})^{\alpha}} dtdr \right) ||u||_p \end{aligned}$$

On sépare l'intégrale en $\int_{t \leq r^{-2}} + \int_{t \geq r^{-2}} = I_1 + I_2$. L'intégrale I_1 est finie si et seulement si

$$(-2)\left(\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-1\right)<1,$$

ce qui équivaut à

$$p>\frac{n}{n-1}.$$

Pour I_2,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_0^\infty e^{-r^2}\left(\int_{r^{-2}}^\infty \frac{1}{t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}}\frac{1}{(r\sqrt{t})^\alpha}dt\right)dr \\ &\leq \int_0^\infty e^{-r^2}\frac{1}{r^\alpha}\left(\int_{r^{-2}}^\infty \frac{1}{t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}}\frac{1}{(\sqrt{t})^\alpha}dt\right)dr \end{aligned}$$

L'intégrale en t est finie si et seulement si

$$\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{\alpha}{2}>1,$$

et en se rappelant que $\alpha=n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, on trouve que c'est équivalent à

$$q>\frac{n}{n-2}.$$

L'intégrale en r est alors

$$\int_0^\infty e^{-r^2}\frac{1}{r^{\alpha-2\left(\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{\alpha}{2}-1\right)}}dr,$$

qui est finie si et seulement si

$$\alpha-n\left(1-\frac{1}{p}\right)-\alpha+2<1,$$

ce qui équivaut à

$$p>\frac{n}{n-1}.$$

□

Montrons à présent le

Lemme 2.7.5

$$||dg_2||_p\leq C||u||_p.$$

Preuve :

On commence par montrer que $||g_2||_p\leq C||u||_p$. On a

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \sum_j \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2}\left(\int_0^{\frac{s^2}{4r^2}} e^{-t\Delta}\left(\mathbf{1}_{A_j}(\Delta\varphi_0)\left(\psi(s)\right)_{A_j}\right)(x)dt\right)drds \\ &= \sum_j \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2}\left(\int_0^{\frac{s^2}{4r^2}} \left(\psi(s)\right)_{A_j} e^{-t\Delta}\left(\mathbf{1}_{A_j}\Delta\varphi_0\right)(x)dt\right)drds, \end{aligned}$$

donc

$$||g_2||_p \leq \sum_j \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2} \left(\int_0^{\frac{s^2}{4r^2}} \left(\frac{1}{|A_j|} \int_{A_j} e^{-s\sqrt{\Delta_0}} |\rho_0 u| \right) ||e^{-t\Delta}\chi||_p dt \right) drds,$$

où on a posé $\chi = \Delta\varphi_0 = \Delta(\varphi_0 - 1)$. Utilisant le fait que $||e^{-t\Delta}||_{1,p} \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}}$, l'analyticité de $e^{-t\Delta}$ sur L^p, et le fait que $\varphi_0 - 1$ est lisse à support compact,

$$||e^{-t\Delta}\chi||_p \leq \frac{C}{\max\left(1, t^{1+\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\right)}, \ \forall t > 0.$$

De plus, on a pour tout $p > 1$,

$$1 + \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right) > 1,$$

et donc

$$\int_0^\infty ||e^{-t\Delta}\chi||_p dt < \infty.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} ||g_2||_p &\leq C \textstyle\sum_j \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2} \left(\int_{A_j} e^{-s\sqrt{\Delta_0}} |\rho_0 u| \right) drds \\ &\leq C \textstyle\sum_j \int_{A_j} \left(\int_0^\infty e^{-s\sqrt{\Delta_0}} |\rho_0 u| ds \right) \\ &\leq C \textstyle\sum_j \int_{A_j} \Delta_0^{-1/2} |\rho_0 u| \end{aligned}$$

D'après le Corollaire 2.7.2 (dans le cas où $p \geq n$, sinon c'est une conséquence de l'inégalité de Sobolev), $\Delta_0^{1/2} : L^p \to L^p_{loc} \hookrightarrow L^1_{loc}$, ce qui implique que

$$||g_2||_p \leq C||u||_p.$$

Passons à Δg_2 : on a, comme pour g_1

$$\begin{aligned} ||\Delta g_2||_p &\leq \textstyle\sum_j \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2} || \left(\psi(s)\right)_{A_j} (\Delta\varphi_0)||_p drds \\ &\leq C \textstyle\sum_j \int_0^\infty |\left(\psi(s)\right)_{A_j}| ds, \end{aligned}$$

et par l'argument qu'on a déjà employé,

$$\sum_j \int_0^\infty |\left(\psi(s)\right)_{A_j}| ds \leq C||u||_p,$$

ce qui conclut la démonstration.

□

Achevons la démonstration du Théorème 2.7.2 dans le cas p-hyperbolique. Si l'on note $T_i = d\Delta_i^{-1/2}$, on a comme dans [12],

$$d\Delta^{-1/2}u = \sum_{i=0}^{1} \varphi_i T_i \rho_i u + \sum_{i=0}^{1} (d\varphi_i)(\Delta^{-1/2}\rho_i u) - dg.$$

On a montré que

$$||dg||_p \leq C||u||_p,$$

et puisque la transformée de Riesz est bornée par hypothèse sur M_0, $\varphi_0 T_0 \rho_0$ est borné sur L^p. De plus, $\varphi_1 T_1 \rho_1$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 à support compact, donc borné sur L^p. L'opérateur $(d\varphi_1)\Delta_1^{-1/2}\rho_1$ a un noyau lisse à support compact donc est borné sur L^p. De plus, d'après le Corollaire 2.7.2 (si $p \geq n$, sinon c'est une conséquence de l'inégalité de Sobolev), $\Delta_0^{-1/2} : L^p \to L^p_{loc}$ est borné, donc l'opérateur $(d\varphi_0)\Delta_0^{-1/2}\rho_0$ est borné sur L^p. Finalement, la transformée de Riesz sur M est bornée sur L^p.

Montrons la deuxième partie du théorème : on suppose à présent que M n'a qu'un seul bout. On va modifier la paramétrice de [12]. Lorsqu'on intègre en σ la paramétrice $E(\sigma, u)$ de [12] et qu'on différencie, on vient de voir qu'on obtient

$$d\Delta^{-1/2}u = \sum_{i=0}^{1} \varphi_i T_i \rho_i u + \sum_{i=0}^{1} (d\varphi_i)(\Delta^{-1/2}\rho_i u) - dg,$$

et les opérateurs $\varphi_i T_i \rho_i$, ainsi que $(d\varphi_1)(\Delta_1^{-1/2}\rho_1)$, sont bornés sur L^p sans hypothèse $p < n$. Ce qui pose problème est l'opérateur $(d\varphi_0)(\Delta_0^{-1/2}\rho_0)$, car si M n'est pas p-hyperbolique, $\Delta^{-1/2}$ n'envoie pas L^p dans L^p_{loc}. Il faut modifier la paramétrice, et on peut deviner ce qu'il faut ajouter, si l'on se souvient de l'heuristique qu'on a faite en discutant de la paramétrice de Carron-Coulhon-Hassell dans la section 2.2.2. Comme indiqué au début de la preuve, lorsque M n'a qu'un seul bout on peut supposer A connexe. On veut ajouter à $E(\sigma, u)$ le terme

$$-(\varphi_0 - 1)\left(\frac{1}{|A|}\int_A e^{-\sigma\sqrt{\Delta_0}}\rho_0 u\right).$$

Rappelons que $\varphi_0 - 1$ est à support compact. L'intégrale par rapport à σ de ce terme est l'analogue du terme G_3 dans la paramétrice de Carron-Coulhon-Hassell : son noyau $k(x, y)$ est non-nul seulement si x est dans K_3 et y est dans $M \setminus K_1$. Ainsi, on pose

$$\tilde{E}(\sigma, u) = E(\sigma, u) - (\varphi_0 - 1)\left(\frac{1}{|A|}\int_A e^{-\sigma\sqrt{\Delta_0}}\rho_0 u\right).$$

Remarquons que le terme qu'on a ajouté à $E(\sigma, u)$ est nul lorsque $\sigma = 0$, puisque A et le support de ρ_0 sont disjoints par hypothèse. On a donc bien

$$\tilde{E}(0, u) = u.$$

Alors, avec les notations de la première partie de la démonstration,

$$d\Delta^{-1/2}u = \sum_{i=0}^{1} \varphi_i T_i \rho_i u + (d\varphi_1)\Delta_1^{-1/2}\rho_1 u + (d\varphi_0)\left(\Delta^{-1/2}\rho_0 u - \left(\frac{1}{|A|}\int_A \Delta_0^{-1/2}\rho_0 u\right)\right) - dg$$

Puisque A est connexe et lisse, A vérifie l'inégalité de Poincaré L^p, et donc

$$\left|\left|\Delta^{-1/2}\rho_0 u - \left(\frac{1}{|A|}\int_A \Delta_0^{-1/2}\rho_0 u\right)\right|\right|_{L^p(A)} \leq \left|\left|d\Delta_0^{-1/2}\rho_0 u\right|\right|_{L^p} \leq C||u||_p,$$

étant donné que la transformée de Riesz sur M_0 est bornée sur L^p. Il suffit donc de voir que le terme d'erreur dg est borné sur L^p lorsque $q > \frac{n}{n-2}$ et $p > \frac{n}{n-1}$, et pour cela on reprend des calculs faits dans la première partie de la démonstration.

$$\begin{aligned}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\Delta\right)\tilde{E}(\sigma,u) &= f_1(\sigma,.)+(\Delta\varphi_0)\left(e^{-t\sqrt{\Delta}}\rho_0 u\right)-2\langle d\varphi_0,\nabla e^{-t\sqrt{\Delta_0}}\rho_0 u\rangle \\ &\quad -(\Delta\varphi_0)\left(\frac{1}{|A|}\int_A e^{-\sigma\sqrt{\Delta_0}}\rho_0 u\right)-(\varphi_0-1)\left(\frac{1}{|A|}\int_A \Delta_0 e^{-\sigma\sqrt{\Delta_0}}\rho_0 u\right).\end{aligned}$$

On a, comme dans la première partie de la démonstration, pour $\alpha = n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$,

$$||f_1(\sigma,.)||_1+||f_1(\sigma,.)||_p \leq \frac{C}{(1+\sigma)^{1+\alpha}},$$

et posant

$$\tilde{f}_0(\sigma,.) := (\Delta\varphi_0)\left(e^{-t\sqrt{\Delta}}\rho_0 u-\left(\frac{1}{|A|}\int_A e^{-\sigma\sqrt{\Delta_0}}\rho_0 u\right)\right)-2\langle d\varphi_0,\nabla e^{-t\sqrt{\Delta_0}}\rho_0 u\rangle,$$

on a aussi, en appliquant l'inégalité de Poincaré L^q sur A et en utilisant (2.41),

$$||\tilde{f}_0(\sigma,.)||_1+||\tilde{f}_0(\sigma,.)||_p \leq \frac{C}{(1+\sigma)^{1+\alpha}}.$$

Il reste donc le terme $(\varphi_0-1)\left(\frac{1}{|A|}\int_A \Delta_0 e^{-\sigma\sqrt{\Delta_0}}\rho_0 u\right)$, dont on doit montrer que la norme L^p est inférieure à $\frac{C}{(1+\sigma)^{1+\beta}}||u||_p$ pour un certain $\beta>0$. Mais par analyticité de $e^{-t\sqrt{\Delta_0}}$,

$$\left|\left|\Delta_0 e^{-t\sqrt{\Delta_0}}\right|\right|_{p,p} \leq \frac{C}{t^2}. \tag{2.44}$$

Il reste à voir que $\Delta_0 e^{-t\sqrt{\Delta_0}}$ est un opérateur borné $L^p(M_0\setminus A_\delta)\to L^\infty(A)$ quand $t\to 0$ (où δ est une constante strictement positive, et où A_δ est l'ensemble des points à distance de A supérieure à δ). On utilise pour cela l'identité de subordination :

$$e^{-\sigma\sqrt{\Delta_0}} = \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{\sigma^2}{4t}}e^{-t\Delta_0}\frac{dt}{t^{3/2}},$$

de sorte que

$$\Delta_0 e^{-\sigma\sqrt{\Delta_0}} = -\frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{\sigma^2}{4t}}\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{-t\Delta_0}\right)\frac{dt}{t^{3/2}}. \tag{2.45}$$

D'après [24], Corollaire 5 (voir aussi [56], Théorème 5.2.15), l'inégalité de Sobolev sur M_0 implique

$$\left|\frac{\partial p^0_\sigma(x,y)}{\partial t}\right| \leq \frac{C}{t^{n+1}}e^{-c\frac{d^2(x,y)}{t}},\ \forall (x,y)\in M_0\times M_0,\ \forall t>0, \tag{2.46}$$

où on a noté $p^0_\sigma(x,y)$ le noyau de la chaleur de M_0. Et donc, si Ω est un ouvert, et F un compact tels que $d(F,\Omega)\geq\varepsilon>0$, alors,

$$\left|\frac{\partial p^0_t(x,y)}{\partial t}\right| \leq \frac{C}{t^{n+1}}\exp\left(-c\frac{\varepsilon^2}{t}\right),\ \forall t>0,\ \forall x\in F,\ \forall y\in\Omega. \tag{2.47}$$

Les estimées (2.46) et (2.47) impliquent l'existence d'une constante (dépendant de la borne inférieure sur la courbure de Ricci de M et de δ) telle que si $t\leq 1$,

$$\left|\left|\frac{\partial}{\partial t}e^{-t\Delta_0}\right|\right|_{L^p(M_0\setminus A_\delta)\to L^\infty(A)} \leq C. \tag{2.48}$$

En effet, notant $k_t(x,y)=\frac{1}{t^{n+1}}\exp\left(-c\frac{\varepsilon^2}{t}\right)$, et K_t l'opérateur de noyau k_t, alors

$$K_t : L^1(\Omega)\to L^\infty(F) \tag{2.49}$$

est borné uniformément quand $t\to 0$: cela vient du fait que par (2.47),

$$||K_t||_{L^1(\Omega)\to L^\infty(F)}=\sup_{x\in F,\, y\in\Omega} k_t(x,y)\leq C,\ \forall t\leq 1.$$

De plus,

$$K_t : L^\infty(\Omega)\to L^\infty(F) \tag{2.50}$$

est borné uniformément quand $t\to 0$. Pour cela, on doit montrer que

$$\sup_{x\in F}\int_\Omega k_t(x,y)\leq C, \text{ pour tout } t \text{ assez petit.}$$

Mais pour $t\leq 1$ et $x\in F$, $y\in\Omega$, (2.46) donne

$$k_t(x,y)\leq C\exp\left(-c\frac{d^2(x,y)}{t}\right). \tag{2.51}$$

On utilise alors que le volume des boules de rayon r est majoré par e^{ar} pour une certaine constante a, puisque la courbure de Ricci est minorée sur M ; on voit donc que pour t assez petit tel que pour tous $x\in F$, $y\in\Omega$,

$$c\frac{d^2(x,y)}{t}\geq ad(x,y),$$

on aura alors par (2.51),

$$\sup_{x\in F}\int_\Omega k_t(x,y)\leq C, \text{ pour tout } t \text{ assez petit.}$$

Finalement, (2.48) s'obtient par interpolation à partir de (2.49) et de (2.50). En utilisant de plus l'analyticité de $e^{-t\Delta_0}$ et le fait que $e^{-\frac{1}{2}\Delta_0}: L^p\to L^\infty$, on obtient

$$\left|\left|\frac{\partial}{\partial t}e^{-t\Delta_0}\right|\right|_{L^p(M_0\backslash A_\delta)\to L^\infty(A)}=||\Delta_0 e^{-t\Delta_0}||_{L^p(M_0\backslash A_\delta)\to L^\infty(A)}\leq\frac{C}{1+t},\ \forall t>0.$$

En particulier,

$$\left|\left|\frac{\partial}{\partial t}e^{-t\Delta_0}\right|\right|_{L^p(M_0\backslash A_\delta)\to L^\infty(A)}\leq C,\ \forall t>0.$$

En utilisant (2.45), on obtient alors

$$\left|\left|\Delta_0 e^{-\sigma\sqrt{\Delta_0}}\right|\right|_{L^p(M_0\backslash A_\delta)\to L^\infty(A)}\leq C,\ \forall\sigma>0,$$

et en se rappelant (2.44), on a

$$\left|\left|\Delta_0 e^{-\sigma\sqrt{\Delta_0}}\right|\right|_{L^p(M_0\backslash A_\delta)\to L^p(A)}+\left|\left|\Delta_0 e^{-\sigma\sqrt{\Delta_0}}\right|\right|_{L^p(M_0\backslash A_\delta)\to L^1(A)}\leq\frac{C}{(1+\sigma)^2},\ \forall\sigma>0.$$

Notant alors

$$\bar{f}_0(\sigma,.) = (\varphi_0 - 1)\left(\frac{1}{|A|}\int_A \Delta_0 e^{-\sigma\sqrt{\Delta_0}}\rho_0 u\right),$$

on a, puisque $\bar{f}_0$ est à support compact,

$$\left|\left|\bar{f}_0(\sigma,.)\right|\right|_1 + \left|\left|\bar{f}_0(\sigma,.)\right|\right|_p \leq \frac{C}{(1+\sigma)^2}||u||_p,\ \forall \sigma > 0.$$

Si l'on pose comme précédemment

$$g := \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^2\times M} G(\sigma,s,x,y)\left[\left(-\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\Delta\right)\tilde{E}(\sigma,u)(s,y)\right] d\sigma ds dy,$$

et reprenant les estimées du Lemme 2.7.4, on voit qu'il existe une constante C telle que

$$||dg||_p \leq C||u||_p.$$

Ceci achève la démonstration.

□

Preuve du Corollaire 2.7.3 : L'hypothèse sur le volume des boules de M implique (voir [12]) que pour tout compact K de M, pour tous $1 \leq p \leq q \leq \infty$, et pour tout $t \geq 1$,

$$\left|\left|e^{-t\Delta}\right|\right|_{L^p(K)\to L^q(M)} \leq \frac{C_K}{t^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}},$$

et la démonstration du Théorème 2.7.2 s'applique.

□

Preuve du Corollaire 2.7.4 : On procède par l'absurde : supposons que la transformée de Riesz sur M soit bornée sur L^p pour un certain $n < p < q$. Alors, puisque M est q-hyperbolique d'après le Corollaire 2.7.1, en appliquant le Théorème 2.7.2 on trouve que la transformée de Riesz sur $M\#M$ serait bornée sur L^r, pour un $n < r < p$. Mais $M\#M = (\mathbb{R}^n\#\mathbb{R}^n)\#(N\#N)$, et puisque $M\#M$ est aussi q-hyperbolique, le Théorème 2.7.2 implique que la transformée de Riesz sur l'union disjointe de $\mathbb{R}^n\#\mathbb{R}^n$ et de $N\#N$ est bornée sur L^s, pour un $n < s < r$. Mais on sait d'après [13] que la transformée de Riesz sur $\mathbb{R}^n\#\mathbb{R}^n$ n'est pas bornée sur L^s si $s \geq n$; on a donc une contradiction.

□

Bibliographie

[1] Akutagawa, K. Yamabe metrics of positive scalar curvature and conformally flat manifolds. *Differential Geom. Appl.*, 4 :239–258, 1994. no. 3.

[2] Alexopoulos, G.. An application of homogeneisation theory to harmonic analysis : Harnack inequalities and Riesz transforms on Lie groups of polynomial growth. *Can. J. Math.*, 44 :691–727, 1992. no. 4.

[3] Ancona and al. Théorie du potentiel sur les graphes et les variétés. *Ecole d'Eté de Probabilité de Saint-Flour XVIII*, pages 1–112, 1988.

[4] Auscher, P. Regularity theorems and heat kernel for elliptic operators. *J. London Math.*, 54 :284–296, 1996. no.2.

[5] Auscher, P. ; Coulhon, T. ; Duong, X.T. ; Hofmann, S. Riesz transforms on manifolds and heat kernel regularity. *Ann. Scient. ENS Paris*, 37 :911–995, 2004. no. 6.

[6] Auscher, P. ; McIntosh, A. ; Tchamitchian, P. Heat kernels of second order complex elliptic operators and applications.

[7] Bakry, D. Etude des Transformations de Riesz dans les variétés Riemanniennes à courbure de Ricci minorée. *Séminaire de probabilités XIX*, 351. Lecture Notes in Mathematics, 1123.

[8] Bérard, P.H. *Spectral Geometry : Direct and Inverse Problems.* Springer-Verlag, 1986. no. 1207.

[9] Carron, G. Inégalités de Faber-Krahn et conséquences. *Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honneur de M. Berger*, 1 :205–232, 1994.

[10] Carron, G. Une suite exacte en L^2-cohomologie. *Duke Mathematical Journal*, 95 :343–371, 1998. no. 2.

[11] Carron, G. L^2-Cohomologie et inégalités de Sobolev. *Mathematische Annalen*, 314 :613–639, 1999.

[12] Carron, G. Riesz Transforms on Connected Sums. *Annales de l'Institut Fourier*, 57 :2329–2343, 2007.

[13] Carron, G. ; Coulhon, T. ; Hassell, A. Riesz transform and L^p-cohomology for manifolds with Euclidean ends. *Duke Mathematical Journal*, 133 :59–93, 2006.

[14] Coulhon, T. Inégalités de Gagliardo-Nirenberg pour les semi-groupes d'opérateurs et applications. *Potential Anal.*, 1. no. 4.

[15] Coulhon, T. Off-diagonal heat kernel lower bounds without Poincaré. *J. London Math. Soc.*, 68 :795–816, 2003. no. 3.

[16] Coulhon, T. ; Dungey, N. Riesz transform and perturbation. *J. Geometric Anal.*, 17 :213–226, 2007. no.2.

[17] Coulhon, T. ; Duong, X.T. Riesz Transforms for $1 \leq p \leq 2$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351 :1151–1169, 1999. no.3.

[18] Coulhon, T. ; Duong, X.T. Riesz Transform and Related Inequalities on Noncompact Riemannian Manifolds. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, LVI :0001–0024, 2003.

[19] Coulhon, T. ; Holopainen, I. ; Saloff-Coste, L. Harnack inequality and hyperbolicity for the p-Laplacian with applications to quasi-regular mappings. *Geom. and Funct. Anal.*, 11 :1139–1191, 2001. no.6.

[20] Coulhon, T. ; Li, H.Q. Estimations inférieures du noyau de la chaleur sur les variétés coniques et transformée de Riesz. *Archiv der Mathematik*, 83 :223–242, 2004.

[21] Coulhon, T. ; Russ, E. ; Tardivel-Nachef, V. Sobolev Algebras on Lie groups and Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 123 :283–342, 2001.

[22] Coulhon, T. ; Saloff-Coste, L. ; Varopoulos, N. *Analysis and geometry on groups.* Cambridge University Press, 1993.

[23] Coulhon, T. ; Zhang, Q. Large Time behavior of Heat Kernel on Forms. *J. Diff. Geometry*, 77 :353–384, 2007. no.3.

[24] Davies, E.B. Non-Gaussian aspects of heat kernel behaviour. *J. London Math. Soc.*, 55 :105–125, 1997.

[25] Davies, E.B. ; Simon, B. L^p norm of noncritical Scrödinger semigroups. *J. Funct. Anal.*, 102 :95–115, 1991. no. 1.

[26] Dodziuk, J. Maximum Principle for Parabolic Inequalities and the Heat Flow on Open Manifolds. *Indiana Univ. Math. J.*, 32 :703–716, 1983. no. 5.

[27] Dungey, N. Heat kernel estimates and Riesz transforms on some Riemannian covering manifolds. *Math. Z.*, 247 :765–794, 2004. no.4.

[28] Fischer-Colbrie, D. On Complete Minimal Surfaces with finite Morse Index in Three Manifolds. *Inventiones Mathematicae*, 82 :121–132, 1985.

[29] Fischer-Colbrie, D. ; Schoen, R. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33 :199–211, 1980.

[30] Gilbarg, D. ; Trudinger, N.S. *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag, 2001.

[31] Gol'dshtein, V. ; Troyanov, M. Capacities in metric spaces. *Integral Equations Oper. Theory*, 44 :212–242, 2002. no. 2.

[32] Grigor'yan, A. Heat Kernel Upper Bounds On A Complete Non-compact Manifold. *Revista Mathematicà Iberoamericana*, 10 :395–452, 1994. no. 2.

[33] Grigor'yan, A. Upper bounds of the derivatives of the heat kernel on an arbitrary complete manifold. *J. Funct. Analysis*, 127 :363–389, 1995.

[34] Grigor'yan, A. Analytic and Geometric Background of Recurrence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 36 :135–249, 1999.

[35] Grigor'yan, A. *Heat Kernel and Analysis on Manifolds.* AMS/IP, 2009.

[36] Grigor'yan, A. ; Saloff-Coste, L. Stability Results for Harnack Inequalities. *Ann. Institut Fourier*, 55 :825–890, 2005. no. 3.

[37] Grigor'yan, A. ; Saloff-Coste, L. Heat kernel on manifolds with ends. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 59 :825–890, 2009. no. 5.

[38] Guillarmou, C. ; Hassell, A. The resolvent at low energy and Riesz transform for Schrodinger operators on asymptotically conic manifolds, Part I. *Math. Annalen*, 341 :859–896, 2008. no. 4.

[39] Guillarmou, C. ; Hassell, A. The resolvent at low energy and Riesz transform for Schrodinger operators on asymptotically conic manifolds, Part II. *Ann. Institut Fourier*, 2008.

[40] Hess H. ; Schrader R. ; Uhlenbrock, D.A. Domination of semigroups and generalisation of Kato's inequality. *Duke Math. J.*, 44 :893–904, 1977. no. 4.

[41] Hess H. ; Schrader R. ; Uhlenbrock, D.A. Kato's inequality and the spectral distribution of Laplacians on compact Riemannian manifolds. *J. Diff. Geom.*, 15 :27–37, 1980. no. 1.

[42] Li, H.Q. Estimations du noyau de la chaleur sur les variétés coniques et applications. *Bull. Sci. math.*, 124 :365–384, 2000. no. 5.

[43] Li, H.Q. Estimation optimale du gradient du semi-groupe de la chaleur sur le groupe de heisenberg. *J. Funct. Anal.*, 236 :269–294, 2006. no. 2.

[44] Li, H.Q. Estimations optimales du noyau de la chaleur sur les groupes de type heisenberg. *J. Reine Angew. Math.*, 646 :195–233, 2010.

[45] Li,P. ; Tam, L.F. Harmonic functions and the structure of complete manifolds. *J. Differential Geom*, 35 :359–383, 1992. no.2.

[46] G. Ma, X. ; Marinescu. *Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2007. Progress in Mathematics, 254.

[47] R. Meyer, Y. ; Coifman. *Wavelets, "Calderón-Zygmund and multilinear operators.* Cambridge studies in advanced mathematics, 1997.

[48] Pigola, S. ; Rigoli, M. ; Setti, A. *Vanishing and Finiteness Results in Geometric Analysis.* Birkhäuser, 2008.

[49] K. Pinchover, Y. ; Tintarev. A ground state alternative for singular Schrödinger operators. *J. Funct. Anal.*, 230 :65–77, 2006. no. 1.

[50] Ray, D.B. ; Singer, I.M. R-Torsion and the Laplacian on Riemannian Manifolds. *Advances in Math.*, 7 :145–210, 1971.

[51] Reed, M. ; Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics I.* Academic Press, 1978.

[52] Reed, M. ; Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics II.* Academic Press, 1978.

[53] Reed, M. ; Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics IV.* Academic Press, 1978.

[54] Saloff-Coste, L. A note on Poincaré, Sobolev and Harnack inequalities. *Duke Math. J.*, 65 :27–38, 1992. no. 2.

[55] Saloff-Coste, L. Uniformly elliptic operators on Riemannian manifolds. *J. Diff. Geometry*, 36 :417–450, 1992. no. 2.

[56] Saloff-Coste, L. *Aspects of Sobolev-Type Inequalities.* Cambridge University Press, 2002.

[57] Sikora, A. Riesz transform, Gaussian bounds and the method of wave equation. *Mathematische Zeitschrift*, 247 :643–662, 2004.

[58] Simon, B. Brownian Motion, L^p Properties of Schrödinger Operators and the Localization of Binding. *Journal of Functional Analysis*, 35 :215–229, 1980.

[59] Stein, E.M. *Topics in Harmonic Analysis related to the Littlewood-Paley Theory.* Princeton University Press. Annals of Mathematics Studies, 63.

[60] Varopoulos, N. Hardy-Littlewood Theory for Semigroups. *Journal of Functional Analysis*, 63 :240–260, 1985. no.2.

[61] Yau, S.T. Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry. *Indiana Univ. Math. J.*, 25 :659–670, 1976. no.7.

RÉSUMÉ et MOTS CLÉS

Titre : Opérateurs de Schrödinger et transformée de Riesz sur les variétés complètes non-compactes

Mots clés : opérateurs de Schrödinger, spectre, transformée de Riesz, noyau de la chaleur, estimée gaussienne, inégalité de Sobolev.

Résumé : Dans une première partie, on donne une condition nécessaire et suffisante à ce qu'un opérateur de Schrödinger sur une variété complète non-compacte ait un nombre fini de valeurs propres négatives. Dans une deuxième partie, on s'intéresse à la transformée de Riesz sur une classe de variétés complètes non-compactes vérifiant une inégalité de Sobolev. On montre d'abord une estimée gaussienne pour le noyau de la chaleur d'opérateurs de Schrödinger généralisés, comme par exemple le Laplacien de Hodge agissant sur les formes différentielles, puis on utilise ceci pour montrer que la transformée de Riesz est bornée sur les espaces L^p si p est compris entre 1 et la dimension de Sobolev. Enfin, on montre un résultat de perturbation pour la transformée de Riesz.

Title : Schrödinger operators and Riesz transform on complete non-compact manifolds

Keywords : Schrödinger operators, spectrum, Riesz transform, heat kernel Gaussian estimate, Sobolev inequality.

Summary : In a first part, we give a necessary and sufficient condition so that a Schrödinger operator on a complete non-compact manifold has a finite number of negative eigenvalues. In a second part, we study the Riesz transform on a class of complete non-compact manifolds satisfying a Sobolev inequality. We first show a Gaussian estimate for the heat kernel of generalise Schrödinger operators, for example the Hodge Laplacian acting on differential forms, then we use this to show that the Riesz transform is bounded on the L^p spaces for p between 1 and the Sobolev dimension. Finally, we show a perturbation result for the Riesz transform.